جدع مشترك علمي	تصحيح فرض شهر مارس 2004

تمرين1

$$f(x)=\frac{-x}{x^2-1}$$

1- نحدد D_f

*- ليكن $x\in\mathbb{R}$

$x\in D_f$ يكافئ $x^2-1\neq 0$

تكافئ $x^2\neq 1$

تكافئ $x\neq 1$ و $x\neq -1$

إذن $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

*- نبين أن f دالة فردية

لكل x من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$: $-x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$

لتكن $x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$

$$f(-x)=\frac{-(-x)}{(-x)^2-1}=-\frac{-x}{x^2-1}=-f(x)$$

إذن f دالة فردية

2- نبين أن لكل عنصرين مختلفين a و b من D_f $\quad\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{ab+1}{(a^2-1)(b^2-1)}$

ليكن a و b من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ حيث $a\neq b$

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{\frac{-a}{a^2-1}-\frac{-b}{b^2-1}}{a-b}=\frac{-a(b^2-1)+b(a^2-1)}{(a^2-1)(b^2-1)}\times\frac{1}{a-b}$$

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{-ab^2+a+ba^2-b}{(a^2-1)(b^2-1)(a-b)}=\frac{ab(a-b)+a-b}{(a^2-1)(b^2-1)(a-b)}$$

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{(a-b)(ab+1)}{(a^2-1)(b^2-1)(a-b)}=\frac{ab+1}{(a^2-1)(b^2-1)}$$

3- نحدد منحى تغيرات f **على** $[0;1[$ **و** $]1;+\infty[$ **و نستنتج منحى تغيراتها على** $]-1;0]$ **و** $]-\infty;-1[$

لدينا لكل عنصرين مختلفين a و b من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ $\quad\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{ab+1}{(a^2-1)(b^2-1)}$

ليكن a و b من $[0;1[$

ومنه $0\leq b\prec 1\quad;\quad 0\leq a\prec 1$ و بالتالي $0\leq b^2\prec 1\quad et\quad 0\leq a^2\prec 1\quad et\quad 0\leq ab\prec 1$

ومنه $-1\leq b^2-1\prec 0\quad et\quad -1\leq a^2-1\prec 0\quad et\quad 1\leq ab+1\prec 2$

إذن $\frac{ab+1}{(a^2-1)(b^2-1)}\succ 0$ ومنه f تزايدية على $[0;1[$

و حيث أن f فردية فان f تزايدية على $]-1;0[$

ليكن a و b من $]1;+\infty[$

ومنه $b \succ 1 \quad ; \quad a \succ 1$ و بالتالي $b^2 \succ 1 \quad et \quad 0 \leq a^2 \succ 1 \quad et \quad ab \succ 1$

ومنه $b^2 - 1 \succ 0 \quad et \quad a^2 - 1 \succ 0 \quad et \quad ab + 1 \succ 2$

إذن $\dfrac{ab+1}{\left(a^2-1\right)\left(b^2-1\right)} \succ 0$ ومنه f تزايدية على $]1;+\infty[$

و حيث أن f فردية فان f تزايدية على $]-\infty;-1[$

4- جدول تغيرات f

x	$-\infty$		**-1**		**0**		**1**		$+\infty$
f		↗	‖		↗		‖	↗	

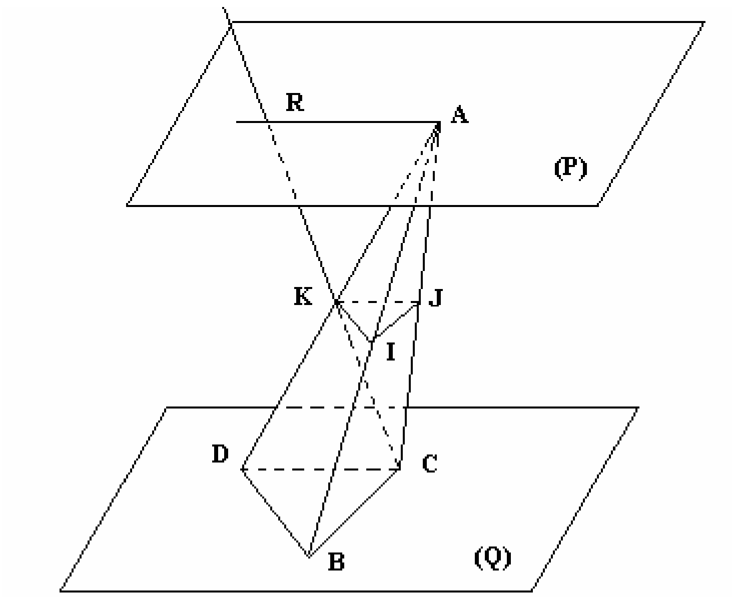
تمرين2

(P) و (Q) **مستويين متوازيين قطعا.** $A \in (P)$ و BCD **مثلث ضمن** (Q) **.**

I و J و K **منتصفات** $[AB]$ و $[AC]$ و $[AD]$ **على التوالي.**

(CK) **يخترق المستوى** (P) **في** R**.**

1- **إنشاء الشكل**



2- **نتبث أن** $(P) \mathbin{//} (IJK)$

في المثلث ABC **لدينا** I و J **منتصفي** $[AB]$ و $[AC]$ **على التوالي**

ومنه $(IJ) \mathbin{//} (BC)$ **و التالي** $(IJ) \mathbin{//} (Q)$ **(1)** **(لأن** $(BC) \subset (Q)$**)**

في المثلث ABD I و K **منتصفات** $[AB]$ و $[AD]$ **على التوالي**

ومنه $(IK) \mathbin{//} (BD)$ **و التالي** $(IK) \mathbin{//} (Q)$ **(2)** **(لأن** $(BD) \subset (Q)$**)**

وحيث أن (IJ) و (IK) **متقاطعان فان من (1) و (2) نستنتج أن** $(Q) \mathbin{//} (IJK)$

و بما أن $(Q) // (P)$ فان $(IJK) // (P)$

3- نتبث أن $(AR)//(CD)$

بما أن (CR) و (AD) يتقاطعان في K فن النقط A و C و D و R مستوائية
ومنه المستقيمان (AR) و (CD) مستوئيان **(3)**
لدينا (P) و (Q) متوازيان قطعا ومنه (P) و (Q) منفصلان
وحيث أن $(CD)\subset(Q)$ و $(AR)\subset(P)$ فان (AR) و (CD) منفصلان **(4)**
من النتيجتين **(3)** و **(4)** نستنتج أن $(AR)//(CD)$