تصحيح فرض أكتوبر 2004
جدع مشترك علمي
موقع الرياضيات بالثانوي

التمرين 1

ليكن x و y من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$. نضع $A=\dfrac{x+y}{1+xy}$

1- نحسب A

$$A=\frac{\frac{1}{3}-\frac{2}{5}}{1+\frac{1}{3}\times-\frac{2}{5}}=\frac{\frac{5-6}{15}}{\frac{15-2}{15}}=\frac{-1}{15}\times\frac{15}{13}=\frac{-1}{13}$$

2- أ) نحسب $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$

$$\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2=3-2\sqrt{3}\sqrt{2}+2=5-2\sqrt{6}$$

ب) نبين أن $A=\sqrt{3}$

لدينا $\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ **و** $\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

ومنه $$A=\frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{5+2\sqrt{6}}}{1+\sqrt{5-2\sqrt{6}}\times\sqrt{5+2\sqrt{6}}}$$

$$A=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}$$

$$A=\frac{2\sqrt{3}}{1+3-2}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

3- أ) نبين أن لكل x **و** y **من** $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ **:** $A+1=\dfrac{(x+1)(y+1)}{1+xy}$ **و** $1-A=\dfrac{(1-x)(1-y)}{1+xy}$

ليكن x **و** y **من** $\mathbb{R}-\{-1;1\}$

* $\dfrac{(x+1)(y+1)}{1+xy}=\dfrac{x+y+xy+1}{1+xy}$ ومنه $\dfrac{(x+1)(y+1)}{1+xy}=\dfrac{x+y}{1+xy}+\dfrac{xy+1}{1+xy}$

إذن $\dfrac{(x+1)(y+1)}{1+xy}=A+1$

** $\dfrac{(1-x)(1-y)}{1+xy}=\dfrac{xy+1-x-y}{1+xy}$ ومنه $\dfrac{(1-x)(1-y)}{1+xy}=\dfrac{xy+1}{1+xy}-\dfrac{x+y}{1+xy}$

إذن $\dfrac{(1-x)(1-y)}{1+xy}=1-A$

ب) نبين أن $-1 \prec A \prec 1$

لدينا $|x| \prec 1$ و $|y| \prec 1$ ومنه $|xy| \prec 1$ و $-1 \prec x \prec 1$ و $-1 \prec y \prec 1$

و بالتالي $-1 \prec xy \prec 1$ أي $0 \prec xy+1 \prec 2$ و $0 \prec x+1 \prec 2$ و $0 \prec y+1 \prec 2$

ومنه $\frac{(x+1)(y+1)}{1+xy} \succ 0$ أي أن $A+1 \succ 0$ إذن $A \succ -1$

لدينا $-1 \prec x \prec 1$ و $-1 \prec y \prec 1$ ومنه $-1 \prec -x \prec 1$ و $-1 \prec -y \prec 1$

و بالتالي $0 \prec 1-x \prec 2$ و $0 \prec 1-y \prec 2$

ومنه $\frac{(1-x)(1-y)}{1+xy} \succ 0$ أي أن $1-A \succ 0$ إذن $A \prec 1$

إذن $-1 \prec A \prec 1$

التمرين2

1- نحل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $\frac{2x-3}{2} - \frac{(5x-2)}{3} \prec 4$

لتكن S مجموعة الحلول و $x \in \mathbb{R}$

$x \in S$ تكافئ $\frac{2x-3}{2} - \frac{(5x-2)}{3} \prec 4$

تكافئ $\frac{6x-9}{6} - \frac{(10x-4)}{6} \prec 4$

تكافئ $6x-9-10x+4 \prec 24$

تكافئ $-4x \prec 29$

تكافئ $x \succ -\frac{29}{4}$

إذن $S = \left]-\frac{29}{4};+\infty\right[$

2- نحل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $|x|+2x-3=1$

لتكن S مجموعة الحلول و $x \in \mathbb{R}$

* إذا كان $x \in \mathbb{R}^+$ فان $|x| = x$

ومنه $|x|+2x-3=1$ تكافئ $x+2x-3=1$

تكافئ $x = \frac{4}{3}$

وحيث $\frac{4}{3} \in \mathbb{R}^+$ فان $S_1 = \left\{\frac{4}{3}\right\}$

** إذا كان $x \in \mathbb{R}^-$ فان $|x| = -x$

ومنه $|x|+2x-3=1$ تكافئ $-x+2x-3=1$

تكافئ $x = 4$

وحيث $4 \notin \mathbb{R}^-$ فان $S_2 = \varnothing$ إذن $S = S_1 \cup S_2 = \left\{ \frac{4}{3} \right\}$

التمرين3

-1 نتأكد أن $\frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2}$ **و** $\frac{\pi}{5} + \frac{3\pi}{10} = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{10} = \frac{4\pi + \pi}{10} = \frac{5\pi}{10} = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{5} + \frac{3\pi}{10} = \frac{2\pi + 3\pi}{10} = \frac{5\pi}{10} = \frac{\pi}{2}$$

-2 نحسب $A = \sin\frac{\pi}{10} + \sin\frac{3\pi}{10} + \cos\frac{3\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5}$

لدينا $\frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2}$ **ومنه** $\sin\frac{\pi}{10} = \cos\frac{2\pi}{5}$

$\frac{\pi}{5} + \frac{3\pi}{10} = \frac{\pi}{2}$ **ومنه** $\sin\frac{3\pi}{10} = \cos\frac{\pi}{5}$

وبالتالي $A = \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5}$

نلاحظ أن $\frac{2\pi}{5} + \frac{3\pi}{5} = \pi$ **و** $\frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} = \pi$ **ومنه** $\cos\frac{3\pi}{5} = -\cos\frac{2\pi}{5}$ **و** $\cos\frac{4\pi}{5} = -\cos\frac{\pi}{5}$

إذن $A = \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} - \cos\frac{\pi}{5} = 0$

التمرين4 **ليكن** $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$ **نضع**

$$P(x) = \cos^4 x + \sin^4 x + 3(\cos^2 x) \cdot \sin^2 x - 2\cos x \cdot \sin x$$

-1 نبين أن $P(x) = (1 - \sin x \cdot \cos x)^2$

$$P(x) = \cos^4 x + \sin^4 x + 3(\cos^2 x) \cdot \sin^2 x - 2\cos x \cdot \sin x$$

$$P(x) = \left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)^2 + \cos^2 x \cdot \sin^2 x - 2\cos x \cdot \sin x$$

$$P(x) = 1 - 2\cos x \cdot \sin x + \cos^2 x \cdot \sin^2 x$$

إذن $P(x) = (1 - \sin x \cdot \cos x)^2$

-2 نكتب $P(x)$ **بدلالة** $\tan x$

لينا $P(x) = (1 - \sin x \cdot \cos x)^2$

وحيث أن $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ **فان** $\sin x = \tan x \cdot \cos x$

ومنه $P(x) = \left(1 - \tan x \cdot \cos^2 x\right)^2$

ونعلم أن $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$ **اذن** $P(x) = \left(1 - \frac{\tan x}{1 + \tan^2 x}\right)^2$

-3 نحسب $P\left(\frac{7\pi}{8}\right)$

لدينا $\sin\frac{7\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

نعلم أن $\cos^2\frac{7\pi}{8}+\sin^2\frac{7\pi}{8}=1$ ومنه $\cos^2\frac{7\pi}{8}=1-\sin^2\frac{7\pi}{8}$

أي $\cos^2\frac{7\pi}{8}=1-\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)^2$ وبالتالي $\cos^2\frac{7\pi}{8}=1-\frac{2+\sqrt{2}}{4}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$

و حيث أن $\frac{7\pi}{8}\in\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$ فان $\cos\frac{7\pi}{8}\prec 0$

إذن $\cos\frac{7\pi}{8}=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

ومنه $P(x)=\left(1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\times-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^2$

$$P(x)=\left(1+\frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}}{4}\right)^2$$

$$P(x)=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2$$

إذن $P(x)=\frac{9}{8}+\frac{\sqrt{2}}{2}$