

تصحيح فرض مارس 2005
موقع الرياضيات بالثانوي
جدع مشترك علمي

التمرين 1

$$f(x) = x|x| - 4x$$

1 - ندرس زوجية الدالة f

$$D_f = \mathbb{R} \text{ لدينا}$$

لكل $x \in \mathbb{R}$ من \mathbb{R} : $-x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = -x|-x| + 4x = -(x|x| - 4x) = -f(x)$$

إذن f دالة فردية

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = x + y - 4 \quad : [0; +\infty[\text{ من } y \text{ و } x \text{ مختلفين}$$

$$\text{لدينا لكل } x \text{ من } [0; +\infty[: f(x) = x^2 - 4x$$

ليكن x و y من $[0; +\infty[$ حيث $x \neq y$

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} &= \frac{x^2 - 4x - y^2 + 4y}{x - y} \\ &= \frac{(x - y)(x + y) - 4(x - y)}{x - y} \\ &= \frac{(x - y)(x + y - 4)}{x - y} \\ &= x + y - 4 \end{aligned}$$

(ب) نحدد رتبة f على كل من $[0; 2[$ و $]2; +\infty[$ ونستنتج رتبة f على كل من $] -2; 0]$ و $] -\infty; -2[$

* ليكن x و y من $[0; 2[$ حيث $x \neq y$ ومنه $0 \leq x < 2$ و $0 \leq y < 2$

و بالتالي $0 \leq x + y < 4$ أي $-4 \leq x + y - 4 < 0$

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} < 0 \text{ ومنه}$$

إذن f تناقصية قطعاً على $[0; 2[$ و حيث أن f فردية فإن f تناقصية قطعاً على $] -2; 0]$

* ليكن x و y من $]2; +\infty[$ حيث $x \neq y$ ومنه $x > 2$ و $y > 2$

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0 \text{ وبالتالي } x + y - 4 > 0 \text{ أي}$$

إذن f تزايدية قطعاً على $]2; +\infty[$ ومنه f تزايدية قطعاً على $] -\infty; -2[$

(ج) جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
f	↗ 4		↘ -4 ↗	

3- نحدد مطارييف الدالة f

بما أن f تزايدية على كل من $]2; +\infty[$ و $] -\infty; -2[$ و تناقصية على $] -2; 2]$ فإن f تقبل قيمة قصى عند -2 هي 4 و قيمة دنيا عند 2 هي -4

4- نحدد تقاطع المنحنى (C_f) و المستقيم (D) ذا المعادلة $y = -2x$

تحديد تقاطع المنحنى (C_f) و المستقيم (D) يرجع إلى حل المعادلة $x|x| - 4x = -2x$

$$x|x| - 4x = -2x \text{ تكافئ } x|x| - 2x = 0$$

$$x(|x| - 2) = 0 \text{ تكافئ } (|x| - 2) = 0$$

$$|x| = 2 \text{ أو } x = 0 \text{ تكافئ}$$

$$x = -2 \text{ أو } x = 2 \text{ أو } x = 0 \text{ تكافئ}$$

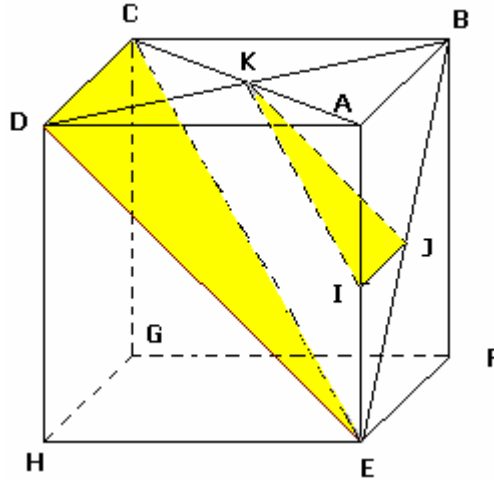
إذن المنحنى (C_f) و المستقيم (D) يتقاطعان في النقط ذات الأفاصل 0 و 2 و -2

التمرين 2

$ABCDEF$ مكعب في الفضاء.

I و J و K منتصفات $[AE]$ و $[BE]$ و $[AC]$ على التوالي

1- الشكل



2- نبين أن $(JK) \parallel (ED)$

لدينا K منتصف $[AC]$ ومنه K منتصف $[BD]$ (لأن $[AC]$ و $[BD]$ قطرا مربع)

وحيث أن J منتصف $[BE]$ بتطبيق خاصية منتصفا ضلعي مثلث على المثلث BDE

نستنتج أن $(JK) \parallel (ED)$

3- نحدد تقاطع المستويين (EBD) و (FAC)

لدينا (EBD) و (FAC) مستويان مختلفان

$[AC]$ و $[BD]$ يتقاطعان في K ومنه K نقطة مشتركة للمستويين (EBD) و (FAC)

$[BE]$ و $[AF]$ يتقاطعان في J (قطرا مربع) ومنه J نقطة مشتركة للمستويين (EBD) و (FAC)

إذن (EBD) و (FAC) يتقاطعان وفق المستقيم (JK)

4- نبين أن $(IJK) \parallel (ECD)$

لدينا $(JK) \parallel (ED)$ ومنه $(JK) \parallel (ECD)$ (1)

في المثلث AEB لدينا I و J منتصفا $[AE]$ و $[BE]$ ومنه $(IJ) \parallel (AB)$

وحيث $(CD) \parallel (AB)$ فان $(IJ) \parallel (CD)$ و بالتالي $(IJ) \parallel (ECD)$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن $(IJK) \parallel (ECD)$