تمرين1

ABC مثلث و I منتصف $[BC]$ و E و F نقطتان حيث $\overrightarrow{AE}=\frac{-1}{4}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

J تقاطع (AI) و (EF) و B' و C' مسقطا B و C على (AI) بتواز مع (EF)

أترك لكم إنشاء الشكل

1- نبين أن I منتصف $[B'C']$

لدينا I و B' و C' مساقط I و B و C على (AI) بتواز مع (EF)

و I منتصف $[BC]$ و بما أن الإسقاط يحافظ على المنتصف فان I منتصف $[B'C']$

2- نبين أن $\overrightarrow{AJ}=\frac{-1}{4}\overrightarrow{AB'}$ و $\overrightarrow{AJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC'}$

لدينا J و B' و A مساقط E و B و A على (AI) بتواز مع (EF) و $\overrightarrow{AE}=\frac{-1}{4}\overrightarrow{AB}$

و منه حسب مبرهنة طاليس المباشرة متجهيا فان $\overrightarrow{AJ}=\frac{-1}{4}\overrightarrow{AB'}$

لدينا J و C' و A مساقط F و C و A على (AI) بتواز مع (EF) و $\overrightarrow{AF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

و منه حسب مبرهنة طاليس المباشرة متجهيا فان $\overrightarrow{AJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC'}$

3- نبين أن $\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AC'}=2\overrightarrow{AI}$ و نستنتج $\overrightarrow{AI}$ بدلالة $\overrightarrow{AJ}$

لدينا I منتصف $[B'C']$ ومنه $\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB'}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC'}=2\overrightarrow{AI}+\vec{0}=2\overrightarrow{AI}$

لدينا $\overrightarrow{AJ}=\frac{-1}{4}\overrightarrow{AB'}$ و $\overrightarrow{AJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC'}$ أي $-4\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AB'}$ و $\frac{4}{3}\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AC'}$

و حيث $\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AC'}=2\overrightarrow{AI}$ فان $2\overrightarrow{AI}=-4\overrightarrow{AJ}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AJ}=-\frac{8}{3}\overrightarrow{AJ}$

إذن $\overrightarrow{AI}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{AJ}$

تمرين2

1- نحل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $\frac{3x-2}{3}-\frac{x}{2}\leq\frac{1-2x}{2}-1$

لتكن $x\in\mathbb{R}$ و S مجموعة الحلول

$\frac{3x-2}{3}-\frac{x}{2}\leq\frac{1-2x}{2}-1$ تكافئ $x-\frac{x}{2}-\frac{2}{3}\leq\frac{1}{2}-x-1$

تكافئ $\frac{x}{2}+x\leq-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$

تكافئ $\frac{3}{2}x\leq\frac{1}{6}$

تكافئ $x\leq\frac{1}{9}$

إذن $S=\left]-\infty;\frac{1}{9}\right]$

2- $P(x)=\left|1-|x-2|\right|$

أ- نكتب المجموعة $A=\{x\in\mathbb{R}/|x-2|\le 1\}$ على شكل مجال

$A=\{x\in\mathbb{R}/|x-2|\le 1\}$ المجال المغلق الذي مركزه 2 و شعاعه 1

إذن $A=[1;3]$

ب- نحل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x)=0$

ليكن $x\in\mathbb{R}$ و S مجموعة الحلول

$P(x)=0$ تكافئ $\left|1-|x-2|\right|=0$

تكافئ $1-|x-2|=0$

تكافئ $|x-2|=1$

تكافئ $x-2=1$ أو $x-2=-1$

تكافئ $x=3$ أو $x=1$

إذن $S=\{1;3\}$

ج- نكتب $P(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة

من خلال- أ- نستنتج أن $|x-2|\le 1$ إذا وفقط إذا كان $x\in[1;3]$

أي $0\le 1-|x-2|$ على $[1;3]$

و $0\succ 1-|x-2|$ على $]-\infty;1[\cup]3;+\infty[$

إذا كان $x\in[1;3]$ فان $P(x)=1-|x-2|$

ومنه: إذا كان $x\in[1;2]$ فان $x-2\le 0$ ومنه $P(x)=1+x-2=x-1$

إذا كان $x\in[2;3]$ فان $x-2\ge 0$ ومنه $P(x)=1-x+2=-x+3$

إذا كان $x\in]-\infty;1[\cup]3;+\infty[$ فان $P(x)=-1+|x-2|$

ومنه : إذا كان $x\in]-\infty;1[$ فان $x-2\le 0$ ومنه $P(x)=-1-x+2=-x+1$

إذا كان $x\in]3;+\infty[$ فان $x-2\succ 0$ ومنه $P(x)=-1+x-2=x-3$

تمرين3

نعتبرفي IR المعادلة $2x^2-\sqrt{2}x-\sqrt{2}=0 \quad (E)$.

1) نبين أن المعادلة (E) تقبل جدرين مختلفين x_1 و x_2 دون تحديدهما

لدينا العددان $a=2$ و $c=-\sqrt{2}$ لهما إشارتين مختلفتين

ومنه (E) تقبل جدرين مختلفين x_1 و x_2

2) نحسب مجموع و جذاء الجدرين x_1 و x_2.

$x_1+x_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ و $x_1\times x_2=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

3) نستنتج أن $\dfrac{1}{x_1^3}+\dfrac{1}{x_2^3}=-8\sqrt{2}$

$$\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3}=\frac{x_1^3+x_2^3}{(x_1x_2)^3}=\frac{(x_1+x_2)\left(x_1{}^2+x_2{}^2-x_1x_2\right)}{(x_1x_2)^3}$$

$$=\frac{(x_1+x_2)\left((x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right)}{(x_1x_2)^3}$$

اذن

$$\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3}=-8\sqrt{2}$$

تمرين4

$$P(x)=2x^3+ax^2+x+2$$

-1 نحدد العدد a حيث 1 جدر للحدودية $P(x)$

1 جدر للحدودية $P(x)$ تكافئ $P(1)=0$

تكافئ $2\times 1^3+a\times 1^2+1+2=0$

تكافئ $a=-5$

-2 نضع $a=-5$

ومنه $P(x)=2x^3-5x^2+x+2$

أ- بإنجاز القسمة الاقليدية نحدد الحدودية $Q(x)$ حيث $P(x)=(x-1)Q(x)$

$$\begin{array}{r|l}
2x^3-5x^2+x+2 & x-1 \\ \cline{2-2}
-2x^3+2x^2 & \\
-3x^2+x & 2x^2-3x-2 \\
3x^2-3x & \\
-2x+2 & \\
2x-2 & \\
0 &
\end{array}$$

$$P(x)=(x-1)\left(2x^2-3x-2\right)$$

إذن $Q(x)=2x^2-3x-2$

ب- نحل في $\mathbb{R}$ المعادلة $Q(x)=0$

$Q(x)=0$ تكافئ $2x^2-3x-2=0$

ليكن Δ مميز المعادلة $\Delta=(-3)^2-4\times 2\times -2=25$

و منه $x=\frac{3+\sqrt{25}}{4}=2$ أو $x=\frac{3-\sqrt{25}}{4}=-\frac{1}{2}$

إذن $S=\left\{-\frac{1}{2};2\right\}$

نحل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $P(x)\prec 0$

$x-1=0$ تكافئ $x=1$

$2x^2-3x-2=0$ تكافئ $x=2$ أو $x=-\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$x-1$		-	|	-	0	+	|	+	
$2x^2-3x-2$		+	0	-	|	-	0	+	
$P(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

إذن $S = \left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup]1;2[$

ج- نحل في المجال $\left]-\infty;\frac{-1}{2}\right[$ المعادلة $x+\left|2x^2-3x-2\right|=|x|$

لدينا إذا كان $x \in \left]-\infty;\frac{-1}{2}\right[$ فان $2x^2-3x-2 \succ 0$ ومنه $\left|2x^2-3x-2\right| = 2x^2-3x-2$

و $|x| = -x$

و بالتالي المعادلة تصبح $x+2x^2-3x-2=-x$ $\quad x \in \left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$

أي $2x^2-x-2=0$

ليكن Δ مميز المعادلة : $\Delta = 17$

ومنه $x=\frac{1+\sqrt{17}}{4}$ أو $x=\frac{1-\sqrt{17}}{4}$

و حيث $\frac{1+\sqrt{17}}{4} \notin \left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$ و $\frac{1-\sqrt{17}}{4} \in \left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$

فان $S=\left\{\frac{1-\sqrt{17}}{4}\right\}$