تصحيح فرض شهر أبريل 2005 Moustaouli Mohamed	**جدع مشترك علمي**

تمرين1

$$f(x)=\frac{2x-1}{x-1} \qquad g(x)=x^2-3|x|$$

1- أ- نحدد D_f

لتكن $x\in\mathbb{R}$

$x\in D_f$ تكافئ $x-1\neq 0$

تكافئ $x\neq 1$

إذن $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

ب- نحسب $f(2)$ و$g(2)$و $f\left(\frac{1}{2}\right)$ و $g(4)$

$$f(2)=\frac{4-1}{2-1}=3 \quad ; \quad g(2)=4-6=-2 \quad ; \quad f\left(\frac{1}{2}\right)=0 \quad ; \quad g(4)=16-12=4$$

2- أ- نتحقق أن لكل من D_f : $f(x)=2+\frac{1}{x-1}$

ليكن $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ $\qquad 2+\frac{1}{x-1}=\frac{2x-2+1}{x-1}=\frac{2x-1}{x-1}=f(x)$

ب- نحدد معادلة C_f بالنسبة للمعلم $(A;\vec{i};\vec{j})$ و نستنتج طبيعته C_f و نعطي جدول تغيرات f

معادلة C_f في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ هي $y=2+\frac{1}{x-1}$ ومنه $y-2=\frac{1}{x-1}$

بوضع $\begin{cases}X=x-1\\Y=y-2\end{cases}$ و اعتبار النقطة $A(1;2)$ فان معادلة C_f في المعلم$(A;\vec{i};\vec{j})$ هي $Y=\frac{1}{X}$

ومنه C_f هذلول مركزه $A(1;2)$ و مقارباه المستقيمان اللذان معادلتهما $x=1$ و $y=2$ على التوالي

جدول تغيرات f

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f	$\searrow$	$\|$	$\searrow$

3- أ- ندرس زوجية g

لكل $x\in\mathbb{R}$ لدينا $-x\in\mathbb{R}$

$$g(-x)=(-x)^2-3|-x|=x^2-3|x|=g(x)$$

g دالة زوجية

ب- نتحقق أن لكل x من $\mathbb{R}^+$: $g(x)=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$

لكل x من $\mathbb{R}^+$: $\qquad g(x)=x^2-3x=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$

ج- نبين أن على $\mathbb{R}^+$ معادلة C_g في المعلم $(B;\vec{i};\vec{j})$ حيث $B\left(\frac{3}{2};-\frac{9}{4}\right)$ هي $Y=X^2$

على $\mathbb{R}^+$ معادلة C_g في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ في المعلم $y=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$ أي $y+\frac{9}{4}=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$

بوضع $\begin{cases} X = x-\frac{3}{2} \\ Y = y+\frac{9}{4} \end{cases}$ و اعتبار النقطة $B\left(\frac{3}{2};-\frac{9}{4}\right)$ فان معادلة C_g في المعلم $\left(B;\vec{i};\vec{j}\right)$ هي $Y=X^2$

د- نستنتج رتابة g على كل من المجالين $\left[0;\frac{3}{2}\right[$ و $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$ و نعطي جدول تغيرات g على $\mathbb{R}$

على $\mathbb{R}^+$ معادلة C_g في المعلم $\left(B;\vec{i};\vec{j}\right)$ هي $Y=X^2$ أي أن جزء C_g على $\mathbb{R}^+$ جزء شلجم رأسه $B\left(\frac{3}{2};-\frac{9}{4}\right)$ ومنه g تناقصية على $\left[0;\frac{3}{2}\right[$ و تزايدية على $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

و حيث أن g زوجية فان g تزايدية على $\left]-\frac{3}{2};0\right]$ و تناقصية على $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$

جدول تغيرات g

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
g	↘	$\frac{9}{4}$	↗ 0 ↘	$\frac{9}{4}$	↗

4- نحدد تقاطع C_g و محور الأفاصيل

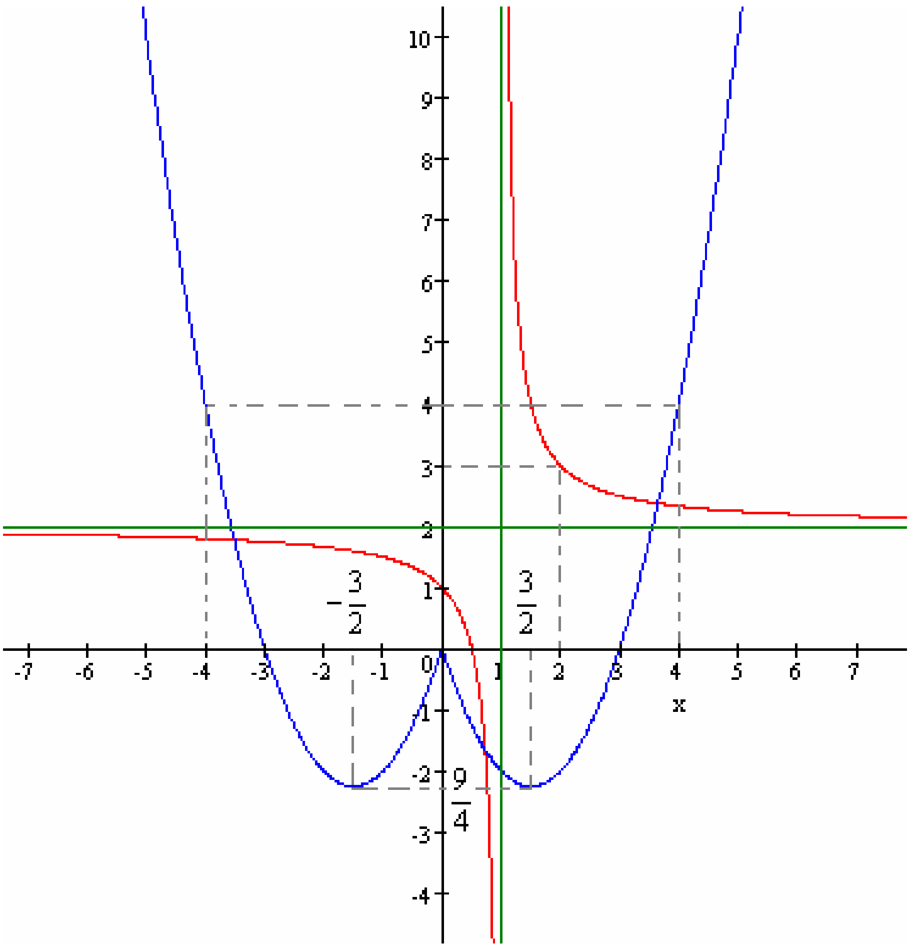
بما أن g زوجية فانه يكفي تحديد تقاطع C_g و محور الأفاصيل على $\mathbb{R}^+$ و استنتاج التقاطع على $\mathbb{R}^-$

ليكن $x\in\mathbb{R}^+$: $g(x)=0$ تكافئ $x^2-3x=0$

تكافئ $x=0$ أو $x=3$

إذن C_g و محور الأفاصيل يتقاطعان في النقط ذات الأفاصيل 0 و 3 و 3- على التوالي

5 - أ- ننشئ C_f و C_g



ب- نحدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $f(x)=g(x)$

من خلال التمثيل المبياني نلاحظ أن C_f و C_g يتقاطعان في ثلاث نقط

ومنه للمعادلة $f(x)=g(x)$ ثلاثة حلول

ج – نحل مبيانيا المتراجحة $x^2-3|x|\geq 0$

$x^2-3|x|\geq 0$ تكافئ C_g فوق محور الأفاصيل

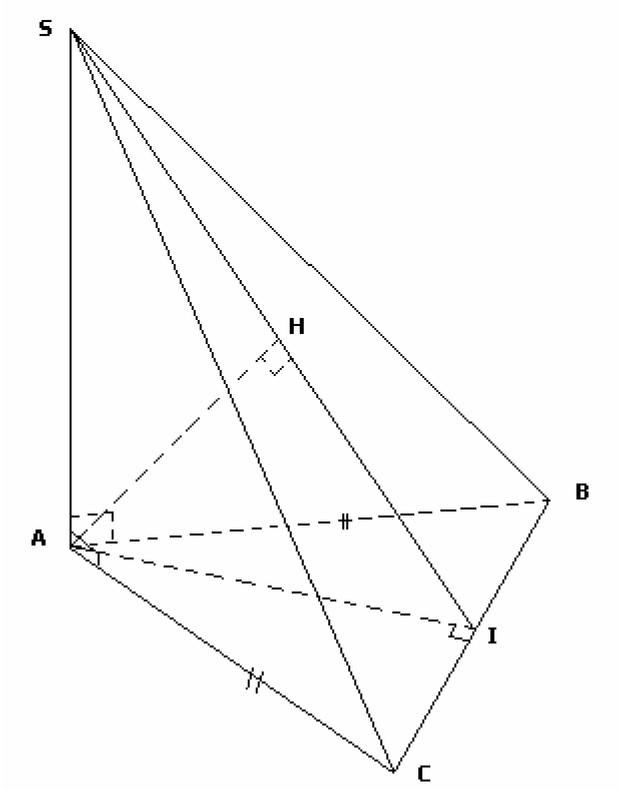
من خلال التمثيل المبياني يتضح أن C_g فوق محور الأفاصيل أو ينطبقان في $]-\infty;-3]\cup[3;+\infty[\cup\{0\}$

إذن $S=]-\infty;-3]\cup[3;+\infty[\cup\{0\}$

تمرين2

ABC مثلثا متساوي الساقين في A ضمن مستوى (P) و I منتصف $[BC]$.

لتكن S نقطة من المستقيم العمودي على (P) في A حيث $S\neq A$



1- نثبت أن $(SAI)\perp(SCI)$

لدينا ABC مثلثا متساوي الساقين في A و I منتصف $[BC]$ ومنه $(AI)\perp(CI)$ (1)

لدينا $(SA)\perp(ABC)$; $(CI)\subset(ABC)$ و منه $(SA)\perp(CI)$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن $(SAI)\perp(CI)$ و بالتالي $(SAI)\perp(SCI)$

2- نثبت أن $(AH)\perp(SC)$

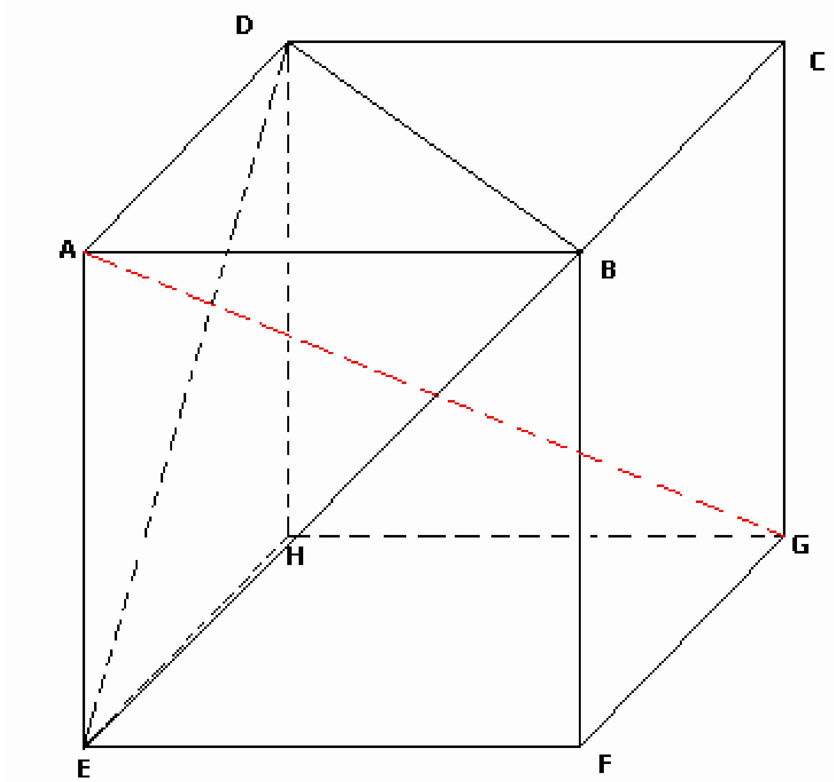
H المسقط العمودي لـ A على (SI) و منه $(AH)\perp(SI)$ (3)

لدينا $(SAI)\perp(CI)$ و $(AH)\subset(SAI)$ و منه $(AH)\perp(CI)$ (4)

من (3) و (4) نستنتج أن $(AH)\perp(SCI)$ ومنه $(AH)\perp(SC)$

تمرين3

$ABCDEFGH$ مكعب طول أحرفه a



1- نبين أن (AG) عمودي على المستوى (BDE)

$(AC)\perp(BD)$ (قطرا مربع)

$(CG)\perp(BD)$ ($(CG)\perp(CBD)$)

ومنه $(ACG)\perp(BD)$ و بالتالي $(AG)\perp(BD)$ (1)

بنفس الطريقة نبين أن $(AFG)\perp(BE)$ و نستنتج $(AG)\perp(BE)$ (2)

من(1) و (2) نستنتج أن $(AG)\perp(BDE)$

2- أحسب حجم المخروط الذي رأسه A وقاعدته الدائرة المحيطة بالمثلث (BDE)

ليكن V حجم هذا المخروط ب

المثلث BDE متساوي الأضلاع و الأوجه ADE وBDA و BAE مثلثات متساويات الساقين رأسها A و متقايسة

ليكن O مسقط A على المستوى BDE

O هو مركز الدائرة المحيطة بالمثلث (BDE) و مركز ثقله

لدينا $BE = DE = BD = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

ليكن I منتصف $[DE]$ ومنه $BI = \sqrt{BD^2 - DI^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{a^2}{4}} = a\frac{\sqrt{3}}{2}$

لدينا $BO = \frac{2}{3}BI = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a$

ومنه مساحة الدائرة المحيطة بالمثلث (BDE) هي $S = \frac{1}{3}a^2\pi$

لدينا $AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{3}a^2} = \frac{2}{3}a$

إذن $V = \frac{1}{3}AO\times S = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}a\cdot\frac{1}{3}a^2\pi = \frac{2}{27}a^3\pi$