بسم الله الرحمن الرحيم

المملكة المغربية

وزارة التربية الوطنية والشباب

المباراة الوطنية في الرياضيات الخاصة بالسنة الأولى علوم رياضية أ و ب المرحلة الثالثة

Olympiades de Mathématiques – 1ère SM – 2006

Correction du test 2

Exercice 1 :

Soit $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ avec les a_i tous des entiers.

On aura : $P(1) = a_n + \ldots + a_1 + a_0 = 4$ et $P(4) = a_n 4^n + \ldots + 4a_1 + a_0 = 9$

Donc $P(4) - P(1) = (4^n - 1)\, a_n + (4^{n-1} - 1)\, a_{n-1} + \ldots + (4 - 1)\, a_1 = 5$

Compte tenu de l'identité $a^n - b^n = (a - b)(\ldots)$, le nombre

$P(4) - P(1) = 5$ est alors divisible par 3, ce qui est absurde.

Exercice 2 :

On a $\sqrt{2}\left(\sqrt{x(x+1)^3} + \sqrt{x^2+1}\right) = (x+1)\sqrt{2x(x+1)} + \sqrt{2(x^2+1)}$

$$\le (x+1)\frac{2x+x+1}{2} + \frac{2+x^2+1}{2} \quad \textbf{(MG} \le \textbf{MA)}$$

$$= \frac{(x+1)(3x+1)+x^2+3}{2} = 2x^2+2x+2 \le 3(x^2+1)$$

Exercice 3 :

L'un des deux sac au moins 33 boules. Et comme il existe seulement 4 couleurs, alors ce sac contient au moins 9 boules de même couleur.Or toute partie de 5 boules de même couleur contient au moins deux boules de même taille et par conséquent, parmi ces 9 boules il existe au plus 4 tailles différentes et par suite, parmi ces 9 boules il existe au moins 3 boules de même taille.

Exercice 4 :

L'égalité $\left(\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}\right)\left(\sqrt{a+c} + \sqrt{a-c}\right) = (a+b+c)\sqrt{2}$ **est**

équivalente à $2\left(a + \sqrt{a^2-b^2}\right)\left(a + \sqrt{a^2-c^2}\right) = (a+b+c)^2$ **(1)**

-Il est clair que si ABC est rectangle c.à.d. si $a^2 = b^2 + c^2$ alors l'égalité a lieu.

-Supposons que $a^2 > b^2 + c^2$. On aura alors $\sqrt{a^2-b^2} > c^2$ **et** $\sqrt{a^2-c^2} > c^2$

d'où $2\left(a + \sqrt{a^2-b^2}\right)\left(a + \sqrt{a^2-c^2}\right) > 2(a+b)(a+b)$

$$= 2a^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$> a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2$$

والله ولي التوفيق

Envoyé par : Abderrazak Tajmouti