



Olympiades de Mathématiques – 1^{ère} SM – 2006

Correction du test 1

Exercice 1 :

On a $A = \frac{x+y}{x-y} = \frac{(x+y)^2}{x^2-y^2} = \frac{8xy}{x^2-y^2}$ et on a aussi $A = \frac{x^2-y^2}{(x-y)^2} = \frac{x^2-y^2}{4xy}$

Donc $A = \frac{2}{A}$ d'où $|A| = \sqrt{2}$

Exercice 2 :

Comme $x^2 + y^2 \leq 1$ et $z^2 + t^2 \leq 4$ alors $x^2z^2 + x^2t^2 + y^2z^2 + y^2t^2 \leq 4$

Or $x^2t^2 + y^2z^2 \leq 2xyzt$ donc $x^2z^2 + y^2t^2 + 2xyzt \leq 4$ c'est-à-dire

$(xz + yt)^2 \leq 4$ d'où le résultat.

Exercice 3 :

a) On a $f(-x) = f(1003 - (1003 + x)) = f(2006 + x) = -f(2006 - x)$
 $= -f(1003 + (1003 - x)) = -f(1003 - (1003 - x)) = -f(x)$

b) $f(x) = f(2006 + (x - 2006)) = -f(2006 - (x - 2006))$
 $= -f(4012 - x) = f(x - 4012) \dots$

Exercice 4 :

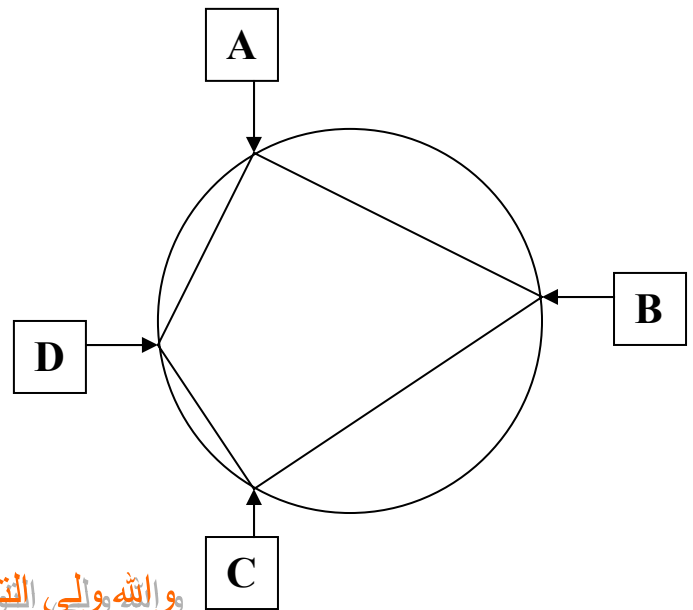
Posons $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ et $DA = d$.

On a $\hat{B} = 60^\circ$ donc $\hat{D} = 120^\circ$.

Le théorème d'Alkashi donne alors :

$a^2 + b^2 - ab = c^2 + d^2 + cd$ (1)

- a) Comme $b = c$ alors (1) devient $a = c + d$.
 b) Si $a = c + d$ alors (1) devient $(b - c)(b - d) = 0$
 Ce qui n'implique pas nécessairement $b = c$.



والله ولي التوفيق