# Olympiades de Mathématiques – 1ère SM – 2006

## Correction du test 1

**Exercice 1 :**

**Posons $t = a + \frac{1}{a}$ . On aura $a^2 + \frac{1}{a^2} = t^2 - 2$ et $a^3 + \frac{1}{a^3} = (a^2 + \frac{1}{a^2})(a + \frac{1}{a}) - (a + \frac{1}{a}) = t^3 - 3t$.**

**Donc $t^3 - 3t = 18$ c'est-à-dire $(t - 3)(t^3 + 3t + 6) = 0$ d'où $t = 3$.**

**Ainsi $a^4 + \frac{1}{a^4} = (a^3 + \frac{1}{a^3})(a + \frac{1}{a}) - (a^2 + \frac{1}{a^2}) = 47$**

**Exercice 2 :**

**On a : $(x + y)(y + z) = y(x + y + z) + xy = \frac{1}{xy} + xz \geq 2$**

**(car $xyz(x + y + z) = 1$ et $a + \frac{1}{a} \geq 2$ pour tout $a > 0$).**

**L valeur 2 est atteinte pour $x = z = 1$ et $y = \sqrt{2} - 1$**

**Exercice 3 :**

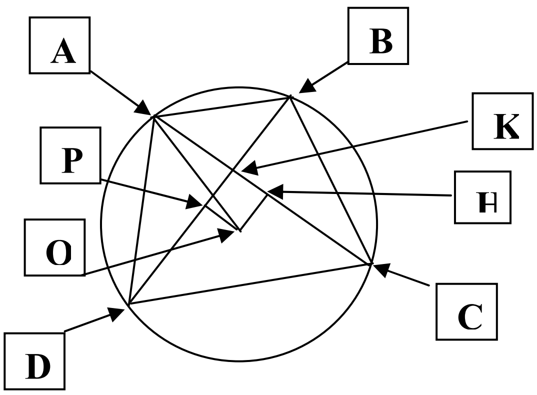
**Soit P la projection de O sur BD, H la projection de O sur CA, K et le point d'intersection des deux diagonales.**

**On a: $S_{(AOCD)} = S_{(AOC)} + S_{(CDA)} = \frac{1}{2} AC.PD$**

**Et comme P est le milieu de BD alors**

**$S_{(AOCD)} = \frac{1}{4} AC.BD = \frac{1}{2} S_{(ABCD)}$**

**(car les diagonales sont perpendiculaires)**




**Exercice 4 :**

**En prenant $x = y = 0$ on trouve $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.**

**- Si $f(0) = 0$ alors pour $y = 0$ on aura pour tout réel $x$, $x = 0$ ce qui absurde.**

**- Si $f(0) = 1$ alors pour $y = 0$ on aura $f(x) = x + 1$ pour tout $x$**

**et on vérifie que cette fonction vérifie bien les conditions du problème.**

والله ولي التوفيق

**Envoyé par : Abderrazak Tajmouti**