OLYMPIADES DE MATHEMATIQUES 2007	الأولى علوم رياضية تصحيح الفرض الأول	أولمبياد الرياضيات 2007

Exercice1 :

On a :

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 7(x-y) \\ x^3 + y^3 = 5(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2) = 7(x-y) \\ (x+y)(x^2-xy+y^2) = 5(x+y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2-7) = 0 \\ (x+y)(x^2-xy+y^2-5) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ x+y=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x-y=0 \\ x^2-xy+y^2-5=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x+y=0 \\ x^2+xy+y^2-7=0 \end{cases} \text{ ou }$$

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2-7=0 \\ x^2-xy+y^2-5=0 \end{cases}$$

Le premier système donne comme solution (0,0)

Le deuxième système donne comme solution $\left(\sqrt{5},\sqrt{5}\right) et \left(-\sqrt{5},-\sqrt{5}\right)$

Le troisième système donne comme solution $\left(\sqrt{7},-\sqrt{7}\right) et \left(-\sqrt{7},\sqrt{7}\right)$

Le quatrième système est équivalaut à $\begin{cases} x^2+y^2=6 \\ xy=1 \end{cases}$ c'est è dire $\begin{cases} (x+y)^2=8 \\ xy=1 \end{cases}$

Ce qui donne comme solutions $\left(\sqrt{2}+1,\sqrt{2}-1\right);\left(-\sqrt{2}-1,-\sqrt{2}+1\right);\left(\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1\right);\left(-\sqrt{2}+1,-\sqrt{2}-1\right)$

Ainsi

$$S=\left\{(0,0);\left(\sqrt{5},\sqrt{5}\right);\left(-\sqrt{5},-\sqrt{5}\right);\left(\sqrt{7},-\sqrt{7}\right);\left(-\sqrt{7},\sqrt{7}\right);\left(\sqrt{2}+1,\sqrt{2}-1\right);\left(-\sqrt{2}-1,-\sqrt{2}+1\right);\left(\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1\right);\left(-\sqrt{2}+1,-\sqrt{2}-1\right)\right\}$$

Exercice 2 :

$$\begin{cases} a^3-3ab^2=11 \\ b^2-3a^2b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^6-6a^4b^2+9a^2b^4=121 \\ b^6-6a^2b^4+9a^4b^2=4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a^2+b^2)^3=125$$

$$\Rightarrow a^2+b^2=5$$

Exercice 3 :

Posons $B\widehat{A}C=\varphi$. On a alors AE=AB=AC$\cos\varphi$ et AF= AD=AC$\sin\varphi$. De même on a AG=AE$\cos\varphi$ et FH=AF$\sin\varphi$, ceci implique :

$$AG+FH=(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)AC=AC$$

Exercice 4 :

$$\frac{2ab}{a+b}+\frac{2bc}{b+c}+\frac{2ca}{c+a}=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\frac{2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}+\frac{2}{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}\leq\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}\leq a+b+c$$