تصحيح فرض شهر يناير2005 (2س.ب.ع.ت)
الرياضيات بالثانوي

تمرين1

$A(-2;-1;-1)$; $B(-1;1;-1)$ و (P) مستوى معادلته $-2x+y+2z+1=0$

و (D) المستقيم المعرف بـ $\begin{cases} x-y-2z-2=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$

1- نحدد $d(A;(P))$

بما أن $A(-2;-1;-1)$ و $(P):-2x+y+2z+1=0$ فان $d(A;(P))=\dfrac{|(-2\times-2)-1+(2\times-1)+1|}{\sqrt{4+1+4}}=\dfrac{2}{3}$

2- نبين أن $(AB)//(P)$

لدينا $\overrightarrow{AB}(1;2;0)$ و $(P):-2x+y+2z+1=0$ ومنه $\vec{n}(-2;1;2)$ منظمية على (p)

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=-2+2+0=0$ ومنه $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$

إذن $(AB)//(P)$

3- نحدد معادلة ديكارتية للمستوى (P')

لدينا (P') المار من A و $\vec{n}(-1;1;2)$ منظمية عليه ومنه معادلته على شكل $-x+y+2z+c=0$

و حيث $A(-2;-1;-1)\in(P')$ فان $2-1-2+c=0$ أي أن $c=1$

إذن $(P'):-x+y+2z+1=0$

4- نحدد معادلة ديكارتية (Q) للمستوى المار من B و العمودي على المستقيم (D)

لدينا $(D):\begin{cases} x-y-2z-2=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$ و منه $(D):\begin{cases} x-y-2t-2=0 \\ x-2y+t=0 \\ z=t \end{cases}$

أي أن $(D):\begin{cases} x=5t+4 \\ y=3t+2 \\ z=t \end{cases}$ و منه $\vec{v}(5;3;1)$ موجهة للمستقيم (D)

لدينا المستوى (Q) عمودي على المستقيم (D) ومنه $\vec{v}(5;3;1)$ منظمية على (Q)

و بالتالي معادلة (Q) على شكل $5x+3y+z+c=0$

وحيث أن $B(-1;1;-1)\in(Q)$ فان $-5+3-1+c=0$ أي أن $c=3$

إذن $(Q):5x+3y+z+3=0$

تمرين2

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{3}x-\sqrt[3]{x} & x\geq 0 \\ f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}+\arctan x & x\prec 0 \end{cases}$$

1- نحسب $f(1)$; $f(8)$; $f(3\sqrt{3})$; $f(-1)$

$f(1)=\dfrac{1}{3}-1=-\dfrac{2}{3}$; $f(8)=\dfrac{8}{3}-2=\dfrac{2}{3}$; $f(3\sqrt{3})=\sqrt{3}-\sqrt{3}=0$

$f(-1)=\dfrac{-1}{2}+\arctan(-1)=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi}{4}$

-2 ندرس اشتقاق الدالة f على يمين 0 و يسار 0 ثم نؤول النتيجتين هندسيا.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{3}x-\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{3}-\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}=-\infty$$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق على يمين 0 و (C_f) يقبل نصف مماس عمودي عند 0 على اليمين

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{x}{x^2+1}+\arctan x}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2+1}+\frac{\arctan x}{x}=2$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على يسار0 و (C_f) يقبل نصف مماس معامله الموجه 2 عند 0 على اليسار

-3 نبين أن $\forall x\in\left]0;+\infty\right[\quad f'(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$; $\forall x\in\left]-\infty;0\right[\quad f'(x)=\frac{2}{\left(x^2+1\right)^2}$

$$\forall x\in\left]0;+\infty\right[\quad f'(x)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$$

$$\forall x\in\left]-\infty;0\right[\quad f'(x)=\frac{x^2+1-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{1}{x^2+1}=\frac{1-2x^2+x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

-4 نحدد جدول تغيرات f

$$\forall x\in\left]0;+\infty\right[\quad f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)\Leftrightarrow x=1$$

$$\forall x\in\left]-\infty;0\right[\quad f'(x)\succ 0$$

جدو ل تغيرات f

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$\frac{-\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{2}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3}x-\sqrt[3]{x}=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{1}{3}-\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{1+x^2}+\arctan x=-\frac{\pi}{2}$$

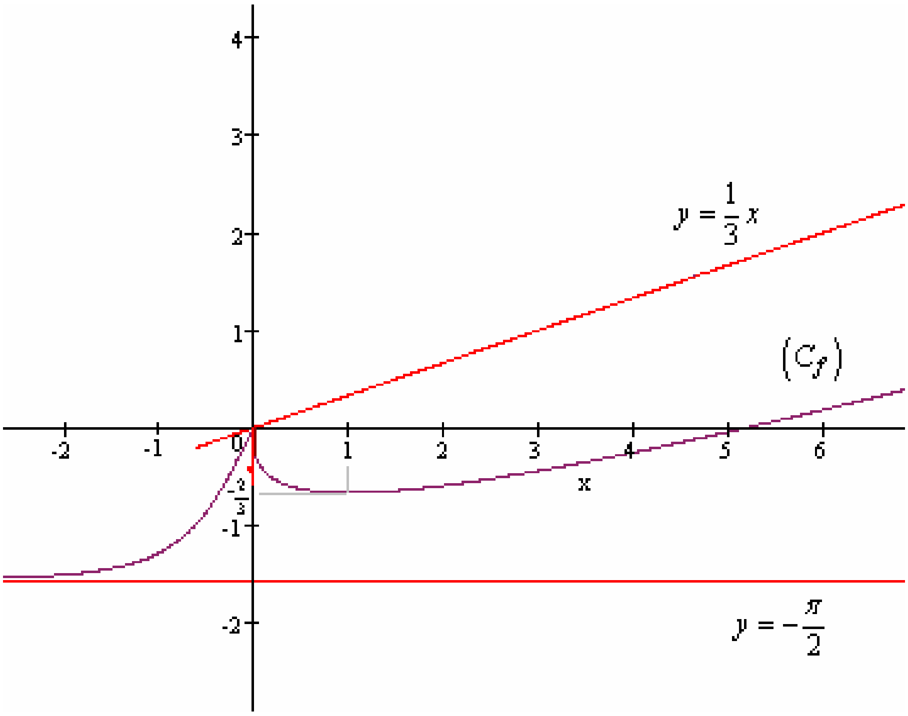
-5 أ- ندرس الفروع اللانهائية

لدينا $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}-\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}\right)=\frac{1}{3}$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)-\frac{1}{3}x=\lim_{x\to+\infty}-\sqrt[3]{x}=-\infty$

ومنه (C_f) يقبل اتجاه مقارب معادلته $y=\frac{1}{3}x$

لدينا $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\frac{\pi}{2}$ ومنه (C_f) يقبل مقارب أفقي معادلته $y=-\frac{\pi}{2}$

ب- ننشئ (C_f) منحنى الدالة f



-6 أ- نبين أن g تقابل من $]1;+\infty[$ نحو مجال يجب تحديده

$$\forall x\in]1;+\infty[\qquad g(x)=f(x)$$

g متصلة في $]1;+\infty[$ و تزايدية قطعا على $]1;+\infty[$ و $g(]1;+\infty[)=\left]-\frac{2}{3};+\infty\right[$

ومنه g تقابل من $]1;+\infty[$ نحو $\left]-\frac{2}{3};+\infty\right[$

ب- ننشئ منحنى الدالة g^{-1}

منحنى الدالة g^{-1} متماثل لجزء منحنى f على $]1;+\infty[$ (يمكنك إنشاءه بسهولة)

تمرين3

$$f(x)=\sqrt[5]{x^4+16}$$

-1 نبين أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و نحسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

$D_f=\mathbb{R}$

الدالة $x\to x^4+16$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ (دالة حدودية) و $x^4+16\succ 0 \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

ومنه f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$\forall x\in\mathbb{R} \qquad f'(x)=\frac{4x^3}{5\left(\sqrt[5]{x^4+16}\right)^4}$$

-2 نستنتج $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[5]{x^4+16}-2}{x-2}$

f قابلة للاشتقاق في 2 و منه $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[5]{x^4+16}-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=\frac{2}{5}$