تصحيح فرض أكتوبر 2004
الثانية سلك بكالوريا علوم تجريبية
موقع الرياضيات بالثانوي

التمرين1

$$\begin{cases} f(x) = \arctan x & x \geq 0 \\ f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1} & x \prec 0 \end{cases}$$

A-1- نحدد مجموعة التعريف D_f ونهايات f عند محداتها.

*لدينا $\arctan x \in \mathbb{R}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}^+$ و $\dfrac{2x}{x^2+1} \in \mathbb{R}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}^{*-}$

إذن $D_f = \mathbb{R}$

*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x^2+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x} = 0$$

2- نحسب $f\left(\dfrac{1}{4}\right) + f\left(\dfrac{3}{5}\right)$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) = \arctan\frac{1}{4} + \arctan\frac{3}{5}$$

لدينا

$$\tan\left(\arctan\frac{1}{4} + \arctan\frac{3}{5}\right) = \frac{\tan\left(\arctan\frac{1}{4}\right) + \tan\left(\arctan\frac{3}{5}\right)}{1 - \left[\tan\left(\arctan\frac{1}{4}\right)\right] \cdot \left[\tan\left(\arctan\frac{3}{5}\right)\right]}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} + \frac{3}{5}}{1 - \frac{1}{4} \times \frac{3}{5}}$$

$$= \frac{17}{17}$$

$$\tan\left(\arctan\frac{1}{4} + \arctan\frac{3}{5}\right) = 1$$

وحيث أن $0 \prec \dfrac{1}{4} \leq \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ و $0 \prec \dfrac{3}{5} \leq \sqrt{3}$ فان $0 \prec \arctan\dfrac{1}{4} \leq \dfrac{\pi}{6}$ و $0 \prec \arctan\dfrac{3}{5} \leq \dfrac{\pi}{3}$

ومنه $0 \prec \arctan\dfrac{1}{4} + \arctan\dfrac{3}{5} \prec \dfrac{\pi}{2}$ إذن $f\left(\dfrac{1}{4}\right) + f\left(\dfrac{3}{5}\right) = \arctan\dfrac{1}{4} + \arctan\dfrac{3}{5} = \dfrac{\pi}{4}$

3- نبين ان g تـقـابل من $]-\infty;-1[$ نحو مجال J يجيب تحديده

* g قصور الـدالة f على $]-\infty;-1[$ ومنه $g(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ $\forall x\in]-\infty;-1[$

g دالة متصلة على $]-\infty;-1[$

لدينا $g'(x)=\dfrac{2x^2+2-4x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$ $\forall x\in]-\infty;-1[$

و منه $g'(x)\prec 0$ $\forall x\in]-\infty;-1[$ إذن g تناقصية قطعا على $]-\infty;-1[$

و $g\left(]-\infty;-1[\right)=]-1;0[$

إذن g تـقـابل من $]-\infty;-1[$ نحو $J=]-1;0[$

***- نحدد $g^{-1}(x)$ لكل x من $]-1;0[$**

ليكن $x\in]-1;0[$ و $y\in]-\infty;-1[$

$$g^{-1}(x)=y\Leftrightarrow g(y)=x$$
$$\Leftrightarrow \frac{2y}{y^2+1}=x$$
$$\Leftrightarrow xy^2-2y+x=0$$

ليكن Δ' الميز المختصر للمعادلة $xy^2-2y+x=0$

ومنه $\Delta'=1-x^2$ لدينا $\Delta'\succ 0$ $\forall x\in]-1;0[$

ومنه $y=\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$ ou $y=\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$

لدينا $x\in]-1;0[$ نعتبر $y=\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$

$$-1-y=-1-\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}=\frac{-\left(x+1+\sqrt{1-x^2}\right)}{x}$$

وحيث أن $-1\prec x\prec 0$ فان $0\prec x+1\prec 1$ إذن $\dfrac{-\left(x+1+\sqrt{1-x^2}\right)}{x}\succ 0$

ومنه $y\prec -1$

إذن $g^{-1}(x)=\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$ $\forall x\in]-\infty;-1[$

- B $u_0=\dfrac{-1}{2}$; $u_{n+1}=\dfrac{2u_n}{u_n^2+1}$

1- نبين أن $-1\prec u_n\prec 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$

من أجل $n=0$ لدينا $u_0=\dfrac{-1}{2}$ ومنه $-1\prec u_0\prec 0$

نفترض $-1\prec u_n\prec 0$ عبارة صحيحة حتى الرتبة n

و نبين أن $-1 \prec u_{n+1} \prec 0$

لدينا $u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n^2+1}$ وحيث $u_n \prec 0$ فان $u_{n+1} \prec 0$

و حيث أن $u_{n+1}+1 = \frac{2u_n}{u_n^2+1}+1 = \frac{(u_n+1)^2}{u_n^2+1}$ و حيث أن $-1 \prec u_n \prec 0$ فان $u_{n+1}+1 \succ 0$

أي $u_{n+1} \succ -1$ و بالتالي $-1 \prec u_{n+1} \prec 0$

إذن $-1 \prec u_n \prec 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

2- بين ان (u_n) متتالية متقاربة و استنتج $\lim u_n$

لدينا $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n) = \frac{2u_n}{u_n^2+1}$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{u_n^2+1} - u_n = u_n\left(\frac{1-u_n^2}{u_n^2+1}\right)$$

وحيث أن $-1 \prec u_n \prec 0$ فان $u_n\left(\frac{1-u_n^2}{u_n^2+1}\right) \prec 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

اذن (u_n) تناقصية و بما أن (u_n) مصغورة فان (u_n) متقاربة

* **نستنتج** $\lim u_n$

لدينا $f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2} \quad \forall x \in]-1;0[$ ومنه $f'(x) \succ 0 \quad \forall x \in]-1;0[$

وبالتالي f تزايدية قطعا على $]-1;0[$ ومتصلة على $]-1;0[$ ومنه $f(]-1;0[) =]-1;0[$

و بما أن (u_n) متقاربة فان نهاية (u_n) حل المعادلة $f(x) = x$ على $[-1;0]$

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{2x}{1+x^2} = x \Leftrightarrow x\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad ou \quad x = 1 \quad ou \quad x = -1$$

وحيث أن (u_n) تناقصية فان $\lim u_n = -1$

التمرين2

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_{n+2} = \frac{3}{2}v_{n+1} - \frac{1}{2}v_n \qquad v_0 = 2 \quad v_1 = 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = v_{n+1} - v_n$$

1 - نحسب v_2

$$v_2 = \frac{3}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_0 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

2- نبين ان (w_n) متتالية هند سية و نكتب حدها العام بدلالة n .

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_{n+1} = v_{n+2} - v_{n+1} = \frac{3}{2}v_{n+1} - \frac{1}{2}v_n - v_{n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_{n+1} = \frac{1}{2}(v_{n+1} - v_n) = \frac{1}{2}w_n$$

اذن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحد ها الأول $w_0 = v_1 - v_0 = 1$

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad w_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

3 – نبين أن $v_n = 1 + \sum_{i=0}^{i=n-1} w_i$ **وحدد v_n بدلالة n واستنتج $\lim v_n$**

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = v_{n+1} - v_n$$

$$w_0 = v_1 - v_0$$
$$w_1 = v_2 - v_1$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$w_{n-1} = v_n - v_{n-1}$$

بجمع أطراف المتساويات نحصل على $\sum_{i=0}^{i=n-1} w_i = v_n - v_0$ أي $v_n = v_0 + \sum_{i=0}^{i=n-1} w_i$

إذن $v_n = 1 + \sum_{i=0}^{i=n-1} w_i$

* **نحدد** v_n **بدلالة n واستنتج $\lim v_n$**

لدينا (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحد ها الأول $w_0 = 1$

ومنه $\sum_{i=0}^{i=n-1} w_i = \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

إذن $v_n = 1 + 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

و حيث $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ فان $\lim_{n\to+\infty} v_n = 3$

التمرين 3

ليكن z عددا عقديا مخالفا ل i- نضع $u = \dfrac{z\left(\overline{z}-i\right)}{z+i}$

1- نبين أن $|u| = |z|$

لدينا $u = \dfrac{z\left(\overline{z}-i\right)}{z+i}$ ومنه $|u| = \left|\dfrac{z\left(\overline{z}-i\right)}{z+i}\right| = \dfrac{|z|\left|\overline{z}-i\right|}{|z+i|}$

وحيث أن $\overline{z+i} = \overline{z} - i$ فان $|\overline{z} - i| = |z+i|$

إذن $|u| = |z|$

2- نحـدد A مجموعة النقط M(z) حـيث u عـدد تخليلي صرف.

ليكن z عددا عقديا مخالفا ل i-

$$M(z)\in A \Leftrightarrow u\in i\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow u=-\overline{u}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z(\overline{z}-i)}{z+i}=-\frac{\overline{z}(z+i)}{\overline{z}-i}$$

$$\Leftrightarrow z(\overline{z}-i)^2+\overline{z}(z+i)^2=0$$

$$\Leftrightarrow z\cdot\overline{z}^2-2iz\cdot\overline{z}-z+z^2\cdot\overline{z}+2iz\cdot\overline{z}-\overline{z}=0$$

$$\Leftrightarrow z\cdot\overline{z}^2-z+z^2\cdot\overline{z}-\overline{z}=0$$

$$\Leftrightarrow z\cdot\overline{z}(z+\overline{z})-(z+\overline{z})=0$$

$$\Leftrightarrow (z+\overline{z})(z\cdot\overline{z}-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (z+\overline{z})=0 \quad ou \quad (z\cdot\overline{z}-1)=0$$

نضع $z=x+iy$ حيث $(x;y)\neq(0;-1)$ ومنه:

$$M(z)\in A \quad \Leftrightarrow x+y=0 \quad ou \quad x^2+y^2-1=0$$

$$M(z)\in A \quad \Leftrightarrow x+y=0 \quad ou \quad x^2+y^2=1$$

نعتبر (C) الدائرة التي مركزها O وشعاعها1 و المستقيم $(D): x+y=0$

نلاحظ أن $B(0;-1)\in(C)$

إذن $A=[(C)\cup(D)]-\{B\}$