تمرين1

$$f(x)=\ln\left(e^{2x}-3e^{x}+3\right)$$

-1 نحدد D_f

لتكن $x\in\mathbb{R}$

$$x\in D_f \Leftrightarrow e^{2x}-3e^{x}+3\succ 0$$

ليكن Δ مميز X^2-3X+3 و منه $\Delta=-3$ و بالتالي $e^{2x}-3e^{x}+3\succ 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$

إذن $D_f=\mathbb{R}$

* نحدد نهايات f عند محدات D_f

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(e^{2x}-3e^{x}+3\right)\lim_{x\to+\infty}\ln\left[e^{2x}\left(1-3e^{-x}+3e^{-2x}\right)\right]=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\ln\left(e^{2x}-3e^{x}+3\right)=\ln 3$$

-2 نحل المتراجحة $f(x)\geq 0$

$$f(x)\geq 0\Leftrightarrow \ln\left(e^{2x}-3e^{x}+3\right)\geq 0$$

$$f(x)\geq 0\Leftrightarrow e^{2x}-3e^{x}+3\geq 1$$

$$f(x)\geq 0\Leftrightarrow e^{2x}-3e^{x}+2\geq 0$$

$$f(x)\geq 0\Leftrightarrow \left(e^{x}-1\right)\left(e^{x}-2\right)\geq 0$$

$$f(x)\geq 0\Leftrightarrow e^{x}\in[0;1]\cup[2;+\infty[$$

$$f(x)\geq 0\Leftrightarrow x\in]-\infty;0]\cup[\ln 2;+\infty[$$

إذن $S=]-\infty;0]\cup[\ln 2;+\infty[$

-3 نحدد $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=\lim_{x\to+\infty}(\ln\left(e^{2x}-3e^{x}+3\right)-2x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1-\frac{3}{e^{x}}+\frac{3}{e^{2x}}\right)=0$$

تمرين3

$$f(x)=2x+\frac{e^{x}}{e^{x}-1}$$

-1 نحدد D_f

لتكن $x\in\mathbb{R}$

$$x\in D_f\Leftrightarrow e^{x}-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq 0$$

إذن $D_f=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

نحدد نهايات f عند محدات D_f

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2x+\frac{e^{x}}{e^{x}-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2x-\frac{1}{1-e^{-x}}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(2x+\frac{e^{x}}{e^{x}-1}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(2x+\frac{e^x}{e^x-1}\right) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(2x+\frac{e^x}{e^x-1}\right) = -\infty$$

2- ندرس تغيرات f و نعطي جدول تغيراتها

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad f'(x) = 2 - \frac{e^x}{\left(e^x-1\right)^2} = \frac{2e^{2x}-5e^x+2}{\left(e^x-1\right)^2}$$

ليكن Δ مميز $2X^2-5X+2$ لدينا $\Delta = 9$

ومنه جدرا $2X^2-5X+2$ هما $X_1 = 2$ و $X_2 = \frac{1}{2}$

$$2X^2-5X+2 \geq 0 \Leftrightarrow X \in \left]-\infty;\frac{1}{2}\right] \cup [2;+\infty[$$

$$x \in \mathbb{R}^* \quad 2e^{2x}-5e^x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^* \quad e^x \in \left]0;\frac{1}{2}\right] \cup [2;+\infty[$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty,-\ln 2] \cup [\ln 2;+\infty[$$

ومنه $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,-\ln 2] \cup [\ln 2;+\infty[$

إذن f تزايدية على كل من $[\ln 2;+\infty[$ و $]-\infty,-\ln 2]$

f تناقصية على كل من $]0;\ln 2[$ و $]-\ln 2;0[$

جدول تغيرات f

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	||	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-1-2\ln 2$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	$2+2\ln 2$	↗	$+\infty$

3- ندرس الفروع اللانهائية لمنحنى f

لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(2x+\frac{e^x}{e^x-1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}}\right)\right) = 2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-2x = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x-1} = 1$$

إذن المستقيم ذا المعادلة $y = 2x+1$ مقارب للمنحنى C_f

لدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-2x = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x-1} = 0$$

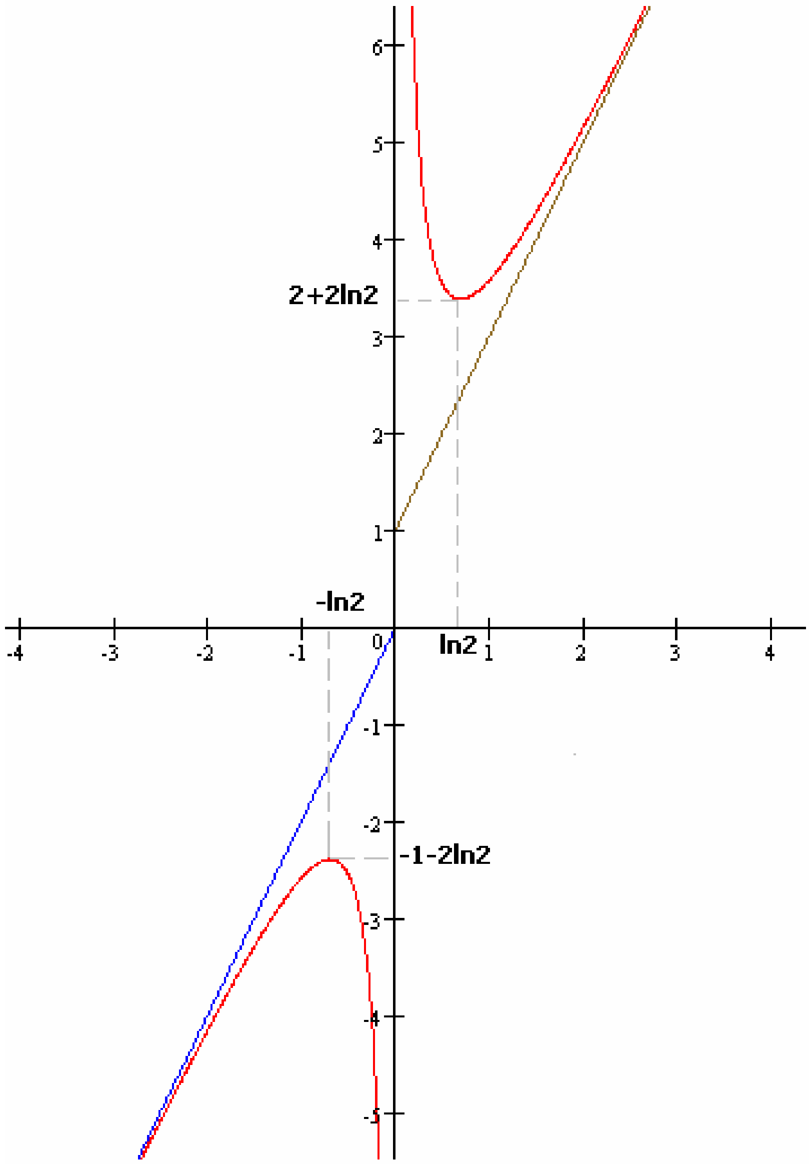
إذن المستقيم ذا المعادلة $y = 2x$ مقارب للمنحنى C_f

نبين أن $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$ مركز تماثل للمنحنى C_f

$$f(-x) = -2x+\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} = -2x+\frac{1}{1+e^x} \quad \text{و} \quad 1-f(x) = 1-2x-\frac{e^x}{e^x+1} = -2x+\frac{1}{1+e^x}$$

ومنه $f(-x)=1-f(x)$ إذن $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$ مركز تماثل للمنحنى C_f

4- ننشئ C_f في مستوى منسوب إلى م.م.م



5- نحدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $2xe^x-(m-1)e^x-2x+m=0$

$$2xe^x-(m-1)e^x-2x+m=0 \Leftrightarrow m\left(1-e^x\right)=2x\left(1-e^x\right)-e^x$$

نلاحظ أن 0 ليس حلا للمعادلة مهما كانت m

ومنه $2xe^x-(m-1)e^x-2x+m=0 \Leftrightarrow m=2x+\dfrac{e^x}{e^x-1} \Leftrightarrow m=f(x)$

تحديد عدد حلول المعادلة $2xe^x-(m-1)e^x-2x+m=0$ يرجع الى تحديد عدد نقط تقاطع C_f و المستقيم ذا المعادلة $y=m$

مبيانيا لدينا :

إذا كان $m\in\left]-1-2\ln 2;2+2\ln 2\right[$ فان المعادلة $2xe^x-(m-1)e^x-2x+m=0$ لا تقبل حلا

إذا كان $m=2+2\ln 2$ أو $m=-1-2\ln 2$ فان المعادلة $2xe^x-(m-1)e^x-2x+m=0$ تقبل حلا وحيدا

إذا كان $m\in\left]-\infty;-1-2\ln 2\right[\cup\left]2+2\ln 2;+\infty\right[$ فان المعادلة $2xe^x-(m-1)e^x-2x+m=0$ تقبل حلين مختلفين

تمرين2

$$\begin{cases} f(x)=e^{x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)} & ; \quad x \succ 1 \\ f(x)=(1-x)\ln(1-x) & ; \quad x \prec 1 \\ f(1)=0 \end{cases}$$

-1 نحدد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$

نضع $t=1-\dfrac{1}{x}$ أي $x=-\dfrac{1}{t-1}$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{t\to1^-} e^{-\frac{\ln(t)}{t-1}}=\dfrac{1}{e}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(1-x)\ln(1-x)=+\infty$$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} e^{x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}=0$ و $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)\ln(1-x)=0$

-2 ندرس الاشتقاق عند 1 و نؤول النتيجتين هندسيا

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{e^{x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{e^{x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}}{e^{\ln(x-1)}}=\lim_{x\to1^+} e^{x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)-\ln(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1^+} e^{(x-1)\ln(x-1)-x\ln x}=1$$

f قابلة للاشتقاق على يمين 1 و المعامل الموجه للمماس على يمين 1 هو 1

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}-\ln(1-x)=+\infty$$

f غير قابلة للاشتقاق على يسار 1 و C_f يقبل مماس عمودي على يسار 1

-3 نحسب $f'(x)$ على كل من $]1;+\infty[$ و $]-\infty;1[$ و نعطي جدول التغيرات

$$\forall x\in]1;+\infty[\quad f'(x)=\left(\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)+x\left(\frac{\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}\right)\right)e^{x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\left[\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x-1}\right]e^{x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}$$

نعتبر $h(x)=\dfrac{1}{x-1}+\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$ $\quad \forall x\in]1;+\infty[$

$$\forall x\in]1;+\infty[\qquad h'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x(x-1)}=\frac{-1}{x(x-1)^2}$$

ومنه h تناقصية على $]1;+\infty[$ و حيث $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0$ فان $h(x)\le 0$ $\quad \forall x\in]1;+\infty[$

ومنه $f'(x)\le 0$ $\quad \forall x\in]1;+\infty[$ إذن f تناقصية على $]1;+\infty[$

* $\forall x\in]-\infty;1[\quad f'(x)=-1-\ln(1-x)$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow -1-\ln(1-x)=0 \Leftrightarrow x=1-e^{-1}$$

ومنه $f'(x)\succ 0$ $\quad \forall x\in\left]1-e^{-1};1\right[$ و $f'(x)\le 0$ $\quad \forall x\in\left]-\infty;1-e^{-1}\right]$

إذن f تزايدية على $\left]1-e^{-1};1\right[$ و تناقصية على $\left]-\infty;1-e^{-1}\right]$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		$1-e^{-1}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	‖	$+$	
f	$+\infty$ ↘		$-e^{-1}$	↗	0		e^{-1}

4- ندرس الفروع اللانهائية و ننشئ C_f

* لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1}{e}$ ومنه المستقيم ذا المعادلة $y=\frac{1}{e}$ مقارب للمنحنى C_f

* لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)==+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}-1\right)\ln(1-x)=-\infty$

ومنه C_f يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب