الثانية باكالوريا ع ت arabmaths.ift.fr	تصحيح فرض تجريبي حول مجموعة الأعداد العقدية	Proposé par : A.BEN ELKHATIR

abouzakariya@yahoo.fr

- **تمرين01:**

1)- نعتبر العدد العقدي $z_0=\dfrac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}}$.

لدينا :
$$z_0=\frac{\left(5+3i\sqrt{3}\right)\left(1+2i\sqrt{3}\right)}{\left(1-2i\sqrt{3}\right)\left(1+2i\sqrt{3}\right)}$$
$$=\frac{\left(5-6\times 3\right)+i\left(3\sqrt{3}+10\sqrt{3}\right)}{1^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}$$
$$=\frac{-13+13i\sqrt{3}}{13}$$

إذن : $z_0=-1+i\sqrt{3}$.

و من جهة أخرى : $z_0^{\,2}=\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2$
$$=\left(i\sqrt{3}\right)^2-2i\sqrt{3}+1^2$$
$$=-2-2i\sqrt{3}$$

ولاحظ أن : $z_0^{\,2}=2\overline{z_0}$.

إذن : $z_0^{\,3}=z_0.2\overline{z_0}=2.z_0\overline{z_0}=2\left(\left(-1\right)^2+\sqrt{3}^2\right)=8$

و بالتالي فإن : $z_0^{\,15}=\left(z_0^{\,3}\right)^5=8^5=32\ 768$.

2)- لحل المعادلة $(E_1):z^2+2i\overline{z}-6=0$ ،

نضع $z=x+iy$ إذن : $\overline{z}=x-iy$ و $z^2=\left(x+iy\right)^2=x^2-y^2+2ixy$

و لدينا : $(E_1)\Leftrightarrow x^2-y^2+2ixy+2i\left(x-iy\right)-6=0$
$$\Leftrightarrow\left(x^2-y^2+2y-6\right)+2ix\left(1+y\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\left(1+y\right)=0\\ x^2-y^2+2y-6=0\end{cases}$$

و منه فإن : $(E_1)\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y^2-2y+6=0\end{cases}$ أو $\begin{cases}y=-1\\ x^2=9\end{cases}$

المميز المختصر للمعادلة $y^2-2y+6=0$ هو $\Delta'=-5<0$

إذن فهي لا تقبل حلا في $\mathbb{R}$.

إذن : $(E_1)\Leftrightarrow\begin{cases}y=-1\\ x^2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\ y=-1\end{cases}$ أو $\begin{cases}x=-3\\ y=-1\end{cases}$

و بالتالي فإن : $S=\{z_1;z_2\}$ حيث $z_1=3-i$ و $z_2=-3-i$.

- نحل المعادلة $(E_2):z^2+2|z|^2-3=0$.

نضع $z=x+iy$ إذن $z^2=x^2-y^2+2ixy$ و $|z|^2=x^2+y^2$ ، و لدينا :
$$(E_2)\Leftrightarrow x^2-y^2+2\left(x^2+y^2\right)-3+2ixy=0$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}xy=0\\ 3x^2+y^2-3=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y^2=3\end{cases}\text{أو}\begin{cases}y=0\\ x^2=1\end{cases}$$

إذن : $S_2=\left\{-1,1,i\sqrt{3},-i\sqrt{3}\right\}$.

- بالنسبة للمعادلة $(E_3):z+3\overline{z}-\left(2+i\sqrt{3}\right)|z|=0$ ، لدينا :
$$(E_3)\Leftrightarrow x+iy+3\left(x-iy\right)-\left(2+i\sqrt{3}\right)\sqrt{x^2+y^2}=0$$
$$\Leftrightarrow\left(4x-2\sqrt{x^2+y^2}\right)-i\left(2y+\sqrt{3\left(x^2+y^2\right)}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}4x-2\sqrt{x^2+y^2}=0\\ 2y+\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x=\sqrt{x^2+y^2}\\ 2y=\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=\sqrt{3}x\\ x=|x|\end{cases}$$

ومنه فإن : $S_3=\left\{x\left(1+i\sqrt{3}\right)/x\in\mathbb{R}_+\right\}$.

3)- نعتبر العدد العقدي $u=\sqrt{2-\sqrt{2}}-i\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

لدينا : $u^2=\sqrt{2-\sqrt{2}}^2-\sqrt{2+\sqrt{2}}^2-2i\sqrt{(2-\sqrt{2}).(2+\sqrt{2})}$

إذن : $u^2=-2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}=-2\sqrt{2}(1+i)$

و بالتالي فإن : $u^4=(u^2)^2=\left(-2\sqrt{2}(1+i)\right)^2=16i$

إذن : $u^4=\left[16,\frac{\pi}{2}\right]$.

- **إستنتاج:**

من جهة $|u^4|=|u|^4=16$ إذن : $|u|=\sqrt[4]{16}=2$.

و من جهة أخرى : $\arg(u^4)\equiv 4\arg u\,[2\pi]\Leftrightarrow 4\arg u\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

إذن $\arg u\equiv\frac{\pi}{8}\left[\frac{\pi}{2}\right]$ أي أن $\arg u=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

و بما أن $\operatorname{Re}(u)>0$ و $\operatorname{Im}(u)<0$ فإن : $-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}<0$

أي أن $k=-1$ ، إذن : $\arg u\equiv-\frac{3\pi}{8}[2\pi]$

و بالتالي فإن : $u=\left[2,-\frac{3\pi}{8}\right]$.

4)- لدينا : $\arg(\sqrt{3}+i)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$ إذن : $\arg\left[(\sqrt{3}+i)^n\right]\equiv\frac{n\pi}{6}[2\pi]$.

ومنه فإن : $(\sqrt{3}+i)^n\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{n\pi}{6}\equiv 0[\pi]\Leftrightarrow\frac{n\pi}{6}=k\pi/k\in\mathbb{Z}$

بمعنى أن : $(\sqrt{3}+i)^n\in\mathbb{R}\Leftrightarrow n=6k/k\in\mathbb{Z}$.

و بنفس الطريقة : $(\sqrt{3}+i)^n\in\mathbb{R}^*_-\Leftrightarrow\frac{n\pi}{6}\equiv\pi[2\pi]\Leftrightarrow\frac{n\pi}{6}-\pi=2k\pi/k\in\mathbb{Z}$

بمعنى أن : $(\sqrt{3}+i)^n\in\mathbb{R}^*_-\Leftrightarrow n=6(2k+1)/k\in\mathbb{Z}$.

و $(\sqrt{3}+i)^n\in i\mathbb{R}^*\Leftrightarrow\frac{n\pi}{6}\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]\Leftrightarrow\frac{n\pi}{6}-\frac{\pi}{2}=k\pi/k\in\mathbb{Z}$

أي أن : $(\sqrt{3}+i)^n\in i\mathbb{R}^*\Leftrightarrow n=3(2k+1)/k\in\mathbb{Z}$.

5)- أ- تعميل الحدودية $P(z)=(z^2+3z)^2+(3z+5)^2$.

لدينا : $(z^2+3z)^2+(3z+5)^2=(z^2+3z)^2-i^2(3z+5)^2$

$$=(z^2+3z)^2-(3iz+5i)^2$$

$$=(z^2+3z+3iz+5i)(z^2+3z-3iz-5i)$$

إذن : $P(z)=(z^2+3(1+i)z+5i)(z^2+3(1-i)z-5i)$.

ب- لحل المعادلة : $(E):z^2+3(1+i)z+5i=0$ نحسب مميزها :

$$\Delta=(3(1+i))^2-4\times 5i=-2i$$

و بما أن : $\Delta=(1-i)^2$ فإن حلي المعادلة (E) هما :

$z_1=-3(1+i)-(1-i)=-4-2i$ و $z_2=-3(1+i)+(1-i)=-2-4i$

إذا كان z حلا للمعادلة $(*):z^2+3(1-i)z-5i=0$ فإن $\overline{z}$ حل للمعادلة (E)

إذن : $z=\overline{z_1}=-4+2i$ أو $z=\overline{z_2}=-2+4i$.

و بالتالي فمجموعة حلول المعادلة (E') هي : $S=\{z_1,z_2,\overline{z_1},\overline{z_2}\}$

حيث : $z_1=-4-2i$ و $z_2=-2-4i$.

ولاحظ أن صور هذه الحلول في المستوى العقدي (P) رؤوس شبه منحرف متساوي الساقين.

ج- من الجواب السابق نستنتج أن : $P(z)=(z-z_1)(z-\overline{z_1})(z-z_2)(z-\overline{z_2})$

و بما أن : $(z-z_1)(z-\overline{z_1})=z^2-(z_1+\overline{z_1})z+z_1\overline{z_1}=z^2+8z+20$

و $(z-z_2)(z-\overline{z_2})=z^2-(z_2+\overline{z_2})z+z_2\overline{z_2}=z^2+4z+20$

فإن : $P(z)=(z^2+8z+20)(z^2+4z+20)$.

6)- ليكن x عددا حقيقيا ، لدينا :

$$x^3-2x^2-ix+3-i=0\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-2x^2+3=0\\x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-1$$

إذن المعادلة (E'') تقبل جذرا حقيقيا هو-1 ، و لدينا :

$$z^3-2z^2-iz+3-i=z^3+z^2-3z^2-3z+(3-i)z+3-i$$

$$=(z+1)(z^2-3z+3-i)$$

نحل الآن المعادلة : $z^2-3z+3-i=0$.

مميزها هو : $\Delta = 9-4(3-i) = -3+4i$

و لدينا $\Delta = (2i)^2 + 2\times 2i + 1 = (1+2i)^2$ ، إذن حليها هما :

$z_1 = \dfrac{3-(1+2i)}{2} = 1-i$ و $z_2 = \dfrac{3+(1+2i)}{2} = 2+i$

و بالتالي فإن : $S = \{-1, 2+i, 1-i\}$.

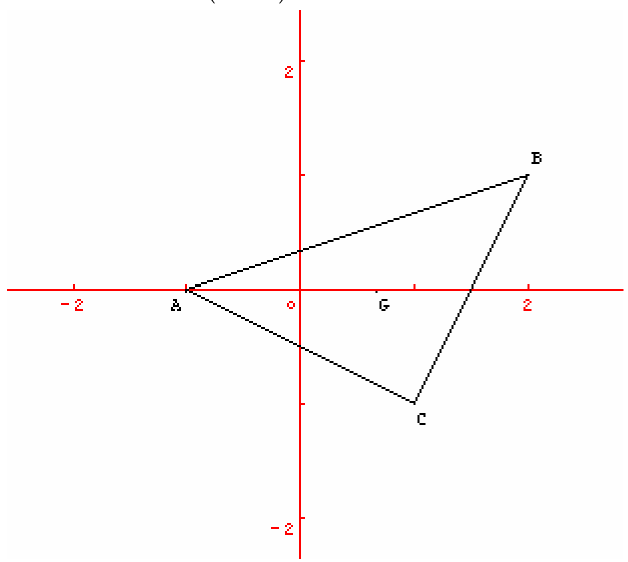
في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$ نعتبر النقط :

$A(-1)$ و $B(2+i)$ و $C(1-i)$.

لدينا $\dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \dfrac{-2+i}{1+2i} = \dfrac{(-2+i)(1-2i)}{1+2^2} = i$ ، إذن : $\dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \left[1, \dfrac{\pi}{2}\right]$

و هذا يعني أن المثلث ABC متساوي الساقين و قائم الزاوية رأسه النقطة C .

لدينا : $z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} = \dfrac{2}{3}$ ، إذن النقطة G مركز ثقل المثلث ABC تنتمي إلى المحور الحقيقي $(O,\vec{e_1})$.



- **تمرين02:**

1)- لدينا : $1+i = \left[\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}\right]$ و $\sqrt{3}-i = \left[2, -\dfrac{\pi}{6}\right]$ إذن : $z_0 = \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}\right]$

بمعنى أن : $z_0 = \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{5\pi}{12}\right]$.

- **إستنتاج:**

لنكتب z_0 على الشكل الجبري ،

لدينا : $z_0 = \dfrac{(1+i)(\sqrt{3}+i)}{3+1} = \dfrac{\sqrt{3}-1+i(\sqrt{3}+1)}{4}$

إذن : $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$ و $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$

وبالتالي فإن : $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ و $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$.

2)- من الواضح أن الشكل المثلثي للعددين z_1 و z_2 هو :

$z_1 = \left[\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\pi}{3}\right]$ و $z_2 = \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{\pi}{6}\right]$.

و لاحظ أن $z_2 = iz_1$ ، إذن : $U_1 = z_1 + iz_1 = (1+i)z_1$

و بالتالي فإن : $U_1 = \left[\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}\right] \times \left[\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\pi}{3}\right] = \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\pi}{12}\right]$.

و من جهة أخرى : $U_2 = z_1 - iz_1 = (1-i)z_1$ ، إذن :

$U_2 = \left[\sqrt{2}, -\dfrac{\pi}{4}\right] \times \left[\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\pi}{3}\right] = \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{7\pi}{12}\right]$.

- **تمرين03:**

1)- لكل z من $\mathbb{C} - \{2i\}$ لدينا : $M(z) \in (\Gamma_1) \Leftrightarrow \dfrac{z-3}{z-2i} = \overline{\left(\dfrac{z-3}{z-2i}\right)}$

إذن : $M(z) \in (\Gamma_1) \Leftrightarrow \dfrac{z-3}{z-2i} = \dfrac{\overline{z}-3}{\overline{z}+2i}$

$\Leftrightarrow z\overline{z} + 2iz - 3\overline{z} - 6i = z\overline{z} - 2i\overline{z} - 3z + 6i$

$\Leftrightarrow 2i(z+\overline{z}) + 3(z-\overline{z}) - 12i = 0$

و إذا وضعنا $z = x+iy$ فإن : $z+\overline{z} = 2x$ و $z-\overline{z} = 2iy$ ، إذن :

$M(z) \in (\Gamma_1) \Leftrightarrow 4ix + 6iy - 12i = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y - 6 = 0$

وبالتالي فإن : $(\Gamma_1)=(D)-\{A(0,2)\}$ ، حيث $(D):2x+3y-6=0$.

- بالنسبة ل (Γ_2) ، لكل z من $\mathbb{C}-\{2i\}$ لدينا :

$$M(z)\in(\Gamma_2)\Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z-3}{z-2i}\right)}=-\frac{z-3}{z-2i}\Leftrightarrow \frac{\bar z-3}{\bar z+2i}=\frac{3-z}{z-2i}$$

إذن : $M(z)\in(\Gamma_2)\Leftrightarrow z\bar z-3z-2i\bar z+6i=-z\bar z-2iz+3\bar z+6i$

أي أن : $M(z)\in(\Gamma_2)\Leftrightarrow 2z\bar z-3(z+\bar z)+2i(z-\bar z)=0$

نضع $z=x+iy$ إذن :

$z+\bar z=2x$ و $z-\bar z=2iy$ و $z\bar z=x^2+y^2$.

و بالتالي فإن :

$$M(z)\in(\Gamma_2)\Leftrightarrow x^2+y^2-3x-2y=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{13}{4}$$

إذن (Γ_2) هي الدائرة التي مركزها $\Omega\left(\frac{3}{2},1\right)$ و شعاعها $r=\frac{\sqrt{13}}{2}$ محرومة من النقطة $A(0,2)$.

- بالنسبة ل (Γ_3) ، لكل z من $\mathbb{C}-\{2i\}$ لدينا :

$$M(z)\in(\Gamma_3)\Leftrightarrow|z-3|=|z-2i|\Leftrightarrow(x-3)^2+y^2=x^2+(y-2)^2$$

بمعنى أن : $M(z)\in(\Gamma_3)\Leftrightarrow -6x+9=-2y+4\Leftrightarrow 6x-2y+4=0$

إذن (Γ_3) هو المستقيم الذي معادلته : $y=3x+2$ محروم من النقطة $A(0,2)$.

2-) لكل z من $\mathbb{C}-\mathbb{R}$ لدينا :

$$M(z)\in(\Sigma_1)\Leftrightarrow\frac{2z-i}{z-\bar z}=-\frac{2\bar z+i}{\bar z-z}\Leftrightarrow\frac{2z-i}{z-\bar z}=\frac{2\bar z+i}{z-\bar z}$$

إذن : $M(z)\in(\Sigma_1)\Leftrightarrow 2z^2-2z\bar z-iz+i\bar z=2z\bar z+iz-2\bar z^2-i\bar z$

$$\Leftrightarrow 2(z^2+\bar z^2)-4z\bar z-2i(z-\bar z)=0$$

$$\Leftrightarrow(z^2+\bar z^2)-2z\bar z-i(z-\bar z)=0$$

نضع $z=x+iy$ حيث $y\in\mathbb{R}^*$ ، إذن : $z^2=x^2-y^2+2ixy$ ، و لدينا :

$$M(z)\in(\Sigma_1)\Leftrightarrow 2(x^2-y^2)-2(x^2+y^2)-2i\times2iy=0$$

$$\Leftrightarrow 2y(1-y)=0\Leftrightarrow y=1\ (y\neq0)$$

وبالتالي فإن (Σ_1) هو المستقيم الذي معادلته : $y=1$.

- بالنسبة ل (Σ_2) ، لكل z من $\mathbb{C}-\mathbb{R}$ لدينا :

$$M(z)\in(\Sigma_2)\Leftrightarrow|2z-i|=|z-\bar z|\Leftrightarrow(2x)^2+(2y-1)^2=(2y)^2$$

$$M(z)\in(\Sigma_2)\Leftrightarrow 4x^2+4y^2-4y+1=4y^2\Leftrightarrow y=x^2+\frac{1}{4}$$

إذن (Σ_2) شلجم معادلته $y=x^2+\frac{1}{4}$.

3-) تكون النقط $M(z)$ و $N(i\bar z)$ و $P(-3i)$ مستقيمية إذا و فقط إذا كان :

$\frac{z+3i}{i\bar z+3i}\in\mathbb{R}$ ، أي أن : $\frac{z+3i}{i\bar z+3i}=\frac{z-3i}{-iz-3i}$

إذن : $M(z)\in(\Sigma)\Leftrightarrow i\left(z^2+\bar z^2\right)+3i(z+\bar z)-3(z-\bar z)=0$

$$\Leftrightarrow x^2-y^2+3(x-y)=0$$

$$\Leftrightarrow(x-y)(x+y+3)=0$$

و بالتالي فإن :

$(\Sigma)=(D_1)\cup(D_2)$ ، حيث : $(D_1):x-y=0$ و $(D_2):x+y+3=0$

عبر عربية لا غربية :

النملة تكرر الصعود ألف مرة
أجمل نجاح بعد تضحية
صاحب الأماني مفلس