تصحيح فرض دجنبر2004
موقع الرياضيات بالثانوي

تمرين1

نحسب $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\arctan\left(x^2-x\right)}{x-1}$

الدالة $f:x\to\arctan\left(x^2-x\right)$ قابلة للاشتقاق في $\mathbb{R}$ (مركب دالتين قابلتين للاشتقاق في $\mathbb{R}$)

و $f'(x)=\dfrac{2x-1}{1+\left(x^2-x\right)^2}$ $\quad\forall x\in\mathbb{R}$ ومنه $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\arctan\left(x^2-x\right)}{x-1}=f'(1)=1$

تمرين2

-1 نجد الجذرين المربعين للعدد $u=-3-4i$

لدينا $u=-3-4i=-4-2\times2i+1=(2i-1)^2$

إذن جذرا u هما $2i-1$ و $-2i+1$

-2 نعتبر $z^3+2z^2+4(-1+i)z+16(1+i)=0 \quad (E)$

1.2 – نبين أن (E) تقبل حلا حقيقا a و نحدده

ليكن $a\in\mathbb{R}$

a حل لـ(E) $\Leftrightarrow a^3+2a^2+4(-1+i)a+16(1+i)=0$

$\Leftrightarrow a^3+2a^2-4a+16+i(-4a-16)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-4a-16=0\\ a^3+2a^2-4a+16=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a=-4\\ a^3+2a^2-4a+16=0\end{cases}$$

-4 تحقق المعادلة $a^3+2a^2-4a+16=0$

إذن $a=-4$

2.2 - نستنتج حلول المعادلة(E)

$$\begin{array}{l|l}
z^3+2z^2+4(-1+i)z+16(1+i) & z+4\\ \cline{2-2}
-z^3-4z^2 & z^2-2z+4(1+i)\\ \cline{1-1}
-2z^2+4(-1+i)z & \\
2z^2+8z & \\ \cline{1-1}
4(1+i)z+16(1+i) & \\
-4(1+i)z-16(1+i) & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

$(E)\Leftrightarrow(z+4)(z^2-2z+4(1+i))=0$

$\Leftrightarrow z=-4 \quad ou \quad z^2-2z+4(1+i)=0$

ليكن Δ' المميز المختصر لـ$z^2-2z+4(1+i)=0$

$\Delta'=1^2-4(1+i)=-3-4i=(2i-1)^2$

إذن $z_1=1+2i-1=2i$ و $z_1=1-2i+1=2-2i$

ومنه $S=\{-4;2i;2-2i\}$

3.2 – نحدد الشكل المثلثي لـ a و z_1 و z_2

$a=-4=[4;\pi]$ و $z_1=2i=\left[2;\frac{\pi}{2}\right]$

و $z_2=2-2i=2\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})=\left[2\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]$

4.2 – نتحقق أن $a+z_1{}^2+z_2{}^4=-72$

$$a+z_1{}^2+z_2{}^4=[4;\pi]+\left[2;\frac{\pi}{2}\right]^2+\left[2\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]^4$$
$$=-4-4-\left(2\sqrt{2}\right)^4$$
$$=-4-4-64=-72$$

3 - لنحل $z^3+2z^2-4(1+i)z+16(1-i)=0$

لـــدينا $\overline{z^3+2z^2+4(-1+i)z+16(1+i)}=\overline{z}^3+2\overline{z}^2-4(1+i)\overline{z}+16(1-i)$

إذن حلول $z^3+2z^2-4(1+i)z+16(1-i)=0$ هم مرافقات حلول (E)

إذن $S=\{-4;-2i;2+2i\}$

-4 (1.4 نبين أن BAC قائم الزاوية و متساوي الساقين في B

لدينا $A(-4)$ و $B(2i)$ و $C(2-2i)$

$$(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}})\equiv\arg\left(\frac{2-2i-2i}{-4-2i}\right)\equiv\arg\left(\frac{2-4i}{-4-2i}\right)$$
$$\equiv\arg\left(\frac{i(-2i-4)}{-4-2i}\right)\equiv\arg(i)\equiv\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$$
$$BA=|-4-2i|=\sqrt{20}\qquad BC=|2-4i|=\sqrt{20}$$

إذن المثلث BAC قائم الزاوية و متساوي الساقين في B

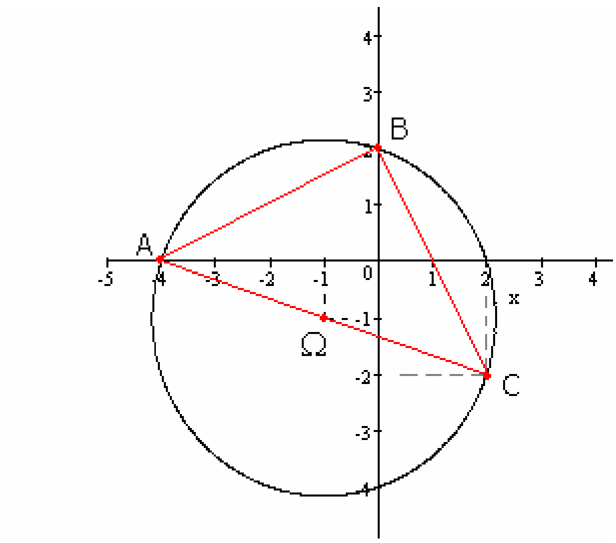
(2.4 نحدد المجموعة (F)

$$M(z)\in(F)\Leftrightarrow|z+1+i|=\sqrt{10}$$
$$M(z)\in(F)\Leftrightarrow\Omega M=\sqrt{10}\qquad/\Omega(1+i)$$
$$M(z)\in(F)\Leftrightarrow M\in C\left(\Omega;\sqrt{10}\right)\qquad/\Omega(-1;-1)$$
$$(F)=C\left(\Omega;\sqrt{10}\right)\qquad/\Omega(-1;-1)$$

(3.4 نتحقق أن $A(-4)$ و $B(2i)$ و $C(2-2i)$ تنتمي إلى (F) و ننشئ BAC و (F)

$$\Omega A=|-4+1+i|=|-3+i|=\sqrt{10}$$
$$\Omega B=|2i+1+i|=|1+3i|=\sqrt{10}$$
$$\Omega A=|2-2i+1+i|=|3-i|=\sqrt{10}$$

إذن A و B و C تنتمي إلى (F)



تمرين3 :

1- نحدد عمدة و معيار u_1 و u_2

$$u_1 = 1-i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left[\sqrt{2};\frac{-\pi}{4}\right]$$

$$u_2 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \left[\sqrt{2};\frac{-\pi}{6}\right]$$

2- نحدد عمدة و معيار $\frac{u_1}{u_2}$ و نستنتج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{\left[\sqrt{2};\frac{-\pi}{4}\right]}{\left[\sqrt{2};\frac{-\pi}{6}\right]} = \left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}};\frac{-\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right] = \left[1;\frac{-\pi}{12}\right]$$

لدينا
$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{1-i}{\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}} = \frac{(2-2i)\left(\sqrt{6}+i\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}-i\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}+i\sqrt{2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)i$$

ومنه
$$\left[1;\frac{-\pi}{12}\right] = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} - \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)i$$

$$\begin{cases} \cos\frac{-\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\frac{-\pi}{12} = -\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) \end{cases}$$ إذن $$\begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

3- نبين أن $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i\right)^{24} = 1$

$$\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i\right)^{24} = \left[1;\frac{\pi}{12}\right]^{24} = \left[1;\frac{24\pi}{12}\right] = [1;2\pi] = 1$$

تمرين4

1- نبين أن $\beta = 2+2i\sqrt{3}$

$$\beta = \left(\overline{z_1}\right)^2 + \left(\overline{z_2}\right)^2 = \left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)^2 - 2\overline{z_1}\cdot\overline{z_2} = \left(\overline{z_1+z_2}\right)^2 - 2\overline{z_1 z_2}$$

$$\beta = \overline{3-i\sqrt{3}}^{\,2} - 2\left(\overline{2-2i\sqrt{3}}\right) = 6+6i\sqrt{3}-4-4i\sqrt{3} = 2+2i\sqrt{3}$$

2- الشكل المثلثي: $\beta = 2+2i\sqrt{3} = 4\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left[4;\frac{\pi}{3}\right]$

3- ليكن n من $\mathbb{N}^*$ لدينا $\beta^n = \left[4;\frac{\pi}{3}\right]^n = \left[4^n;\frac{\pi n}{3}\right]$

وحيث $\left[4^n;\frac{\pi n}{3}\right] \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow n \in 6\mathbb{Z}$ فان: أصغر عدد n من $\mathbb{N}^*$ حيث $\beta^n \in \mathbb{R}^+$ هو العدد 6