تصحيح فرض شهر أبريل 2005 Moustaouli Mohamed	2 سلك بكالوريا علوم تجريبية

تمرين1

$$\begin{cases} f(x)=e^{x}\sqrt{1-e^{2x}} & , x\le 0 \\ f(x)=e^{\frac{\ln x}{x}} & , x\succ 0 \end{cases}$$

.1 أ/ نبين أن $D_f=\mathbb{R}$

$1-e^{2x}\ge 0 \quad \forall x\le 0$ ومنه $f(x)\in\mathbb{R} \quad \forall x\le 0$ وبالتالي $]-\infty;0]\subset D_f$

$e^{\frac{\ln x}{x}}\in\mathbb{R} \quad \forall x\succ 0$ ومنه $]0,\infty[\subset D_f$

إذن $D_f=\mathbb{R}$

ب/ نحسب نهايات f عند محدات D_f. ثم نؤول النتائج هندسيا.

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}\sqrt{1-e^{2x}}=0$

ومنه المستقيم ذا المعادلة $y=0$ مقارب أفقي للمنحنى C_f

* لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}}=1$

ومنه المستقيم ذا المعادلة $y=1$ مقارب أفقي للمنحنى C_f

.2 أ/ ندرس اتصال f عند $x_0=0$.

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-} e^{x}\sqrt{1-e^{2x}}=0$ و $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} e^{\frac{\ln x}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}\ln x}=0$

ومنه $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=f(0)$ اذن f متصلة في 0

ب/ ندرس اشتقاق f عند $x_0=0$. ثم نؤول النتيجة هندسيا.

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{e^{x}\sqrt{1-e^{2x}}}{x}=\lim_{x\to0^-}-e^{x}\sqrt{\frac{1-e^{x}}{-x}}\sqrt{\frac{1+e^{x}}{-x}}=-\infty$$

f غير قابلة للاشتقاق في0 على اليسار و تقبل نصف مماس عمودي عند النقطة ذات الأفصول 0

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{\ln x}{x}}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{\ln x}{x}}}{e^{\ln x}}=\lim_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}(\ln x-x\ln x)}=0$$

f قابلة للاشتقاق في0 على اليمين و تقبل نصف مماس أفقي عند النقطة ذات الأفصول 0

.3 أ/ نثبت أن f' الدالة المشتقة للدالة f معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} f'(x)=\frac{e^{x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}(1-2e^{2x}) & , x\prec 0 \\ f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^{2}}e^{\frac{\ln x}{x}} & , x\succ 0 \end{cases}$$

$$\forall x \prec 0 \qquad f(x)=e^{x}\sqrt{1-e^{2x}}$$

ومنه $\forall x \prec 0 \qquad f'(x)=e^{x}\sqrt{1-e^{2x}}+e^{x}\dfrac{-e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}=e^{x}\left(\dfrac{1-e^{2x}-e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}\right)=\dfrac{e^{x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}(1-2e^{2x})$

$\forall x \succ 0 \quad f(x)=e^{\frac{\ln x}{x}}$ ومنه $\forall x \succ 0 \quad f'(x)=\left((\dfrac{\ln x}{x})'\right)e^{\frac{\ln x}{x}}=\dfrac{1-\ln x}{x^{2}}e^{\frac{\ln x}{x}}$

ب/ نستنتج تغيرات الدالة f .و نعطي جدول التغيرات.

* على $]-\infty;0[$ اشارة $f'(x)$ هي اشارة $1-2e^{2x}$

$$1-2e^{2x}=0 \Leftrightarrow e^{2x}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{-\ln 2}{2}$$

* على $]0;+\infty[$ اشارة $f'(x)$ هي اشارة $1-\ln x$

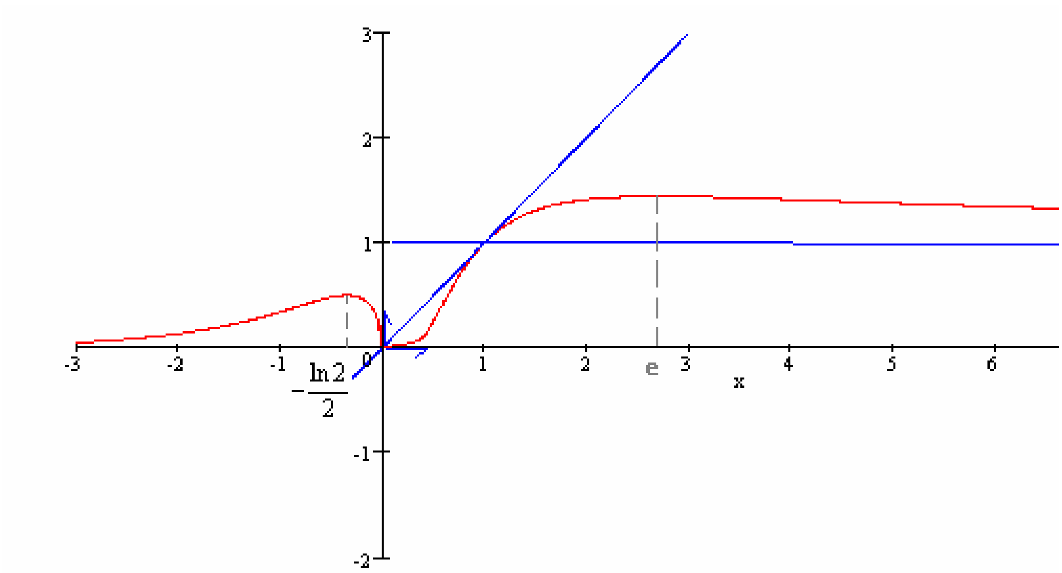
$$1-\ln x=0 \Leftrightarrow x=e$$

x	$-\infty$		$-\frac{\ln 2}{2}$		0		e		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	||	+	0	-	
f	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0	↗	$e^{\frac{1}{e}}$	↘	1

4. نكتب معادلة المماس لـ C_f في النقطة $A(1,1)$.

لدينا $f'(1)=1$ و $f(1)=1$ ومنه معادلة المماس لـ C_f في النقطة $A(1,1)$ هو المستقيم ذا المعادلة $y=x$

5. ننشئ C_f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$



6. لتكن g قصور الدالة f على المجال $I=\left[-\frac{1}{2}\ln 2\,,\,0\right]$

أ/ نبين أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده

g متصلة على I وتناقصية قطعا على I و $g(I)=\left[0;\frac{1}{2}\right]$

ومنه g تقابل من I نحو مجال $J=\left[0;\frac{1}{2}\right]$

ب/ جدول تغيرات الدالة g^{-1}

x	0 $\qquad\qquad$ $\frac{1}{2}$
g^{-1}	0 $\searrow$ $-\frac{\ln 2}{2}$

ج/ نحدد الصيغة $g^{-1}(x)$ لكل x من J

ليكن $x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$ و $y\in\left[-\frac{1}{2}\ln 2\,,\,0\right]$

$$g^{-1}(x)=y\Leftrightarrow g(y)=x$$
$$\Leftrightarrow e^{y}\sqrt{1-e^{2y}}=x$$
$$\Leftrightarrow e^{2y}\left(1-e^{2y}\right)=x$$

نضع $Y=e^{2y}$ و $Y\in\left[\frac{1}{2};1\right]$

$$g^{-1}(x)=y\Leftrightarrow Y^{2}-Y+x=0$$
$$\Leftrightarrow\left(Y-\frac{1}{2}\right)^{2}=\frac{1}{4}-x$$
$$\Leftrightarrow Y=\sqrt{\frac{1}{4}-x}+\frac{1}{2}$$

ومنه

$$g^{-1}(x)=y\Leftrightarrow e^{2y}=\sqrt{\frac{1}{4}-x}+\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{\frac{1}{4}-x}+\frac{1}{2}\right)$$

إذن $g^{-1}(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{\frac{1}{4}-x}+\frac{1}{2}\right)\qquad\forall x\in J$

تمرين 2

لدين قطعة نقدية غير متوازنة حيث احتمال ظهور الوجه F هو $\frac{3}{5}$ و صندوقا يحتوي على 7 كرات غير قابلة للتمييز باللمس، 4 كرات بيضاءو3 كرات سوداء.

التجربة: **نرمي القطعة النقدية إذا سقطت على الظهر P نسحب من الصندوق كرتين بالتتابع و بإحلال و إذا سقطت على الوجه F فإننا نسحب من الصندوق كرتين بالتتابع و بدون إحلال.**

1) نحسب احتمال الحصول على كرتين لهما نفس اللون

ليكن A الحدث الحصول على نفس اللون

$$p(A)=p(BB)+p(NN)$$
$$p(BB)=p/F(BB)\cdot p(F)+p/P(BB)\cdot p(P)$$
$$p(BB)=\frac{A_4^2}{A_7^2}\cdot\frac{3}{5}+\frac{4^2}{7^2}\cdot\frac{2}{5}=\frac{6}{35}+\frac{32}{245}=\frac{74}{245}$$
$$p(NN)=p/F(NN)\cdot p(F)+p/P(NN)\cdot p(P)$$
$$p(NN)==\frac{A_3^2}{A_7^2}\cdot\frac{3}{5}+\frac{3^2}{7^2}\cdot\frac{2}{5}=\frac{3}{35}+\frac{18}{245}=\frac{39}{245}$$
$$p(A)=\frac{74}{245}+\frac{39}{245}=\frac{113}{245}$$

2) علما أن الكرتين المسحوبتين مختلفتا اللون ، نحسب احتمال سحبهما بالتتابع و بإحلال
الحدث $\overline{A}$ " سحب كرتين مختلفتي اللون"
احتمال السحب بالتتابع و بإحلال علما أن الكرتين المسحوبتين مختلفتا اللون هو

$$p/\overline{A}(P)=\frac{p(P)}{p(\overline{A})}=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{113}{245}}=\frac{49}{66}$$

3) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات البيضاء المسحوبة
أ) نعطي قانون احتمال X.
$$X(\Omega)=\{0;1;2\}$$
$$p(X=0)=p(NN)=\frac{39}{245} \text{ و } p(X=1)=p(\overline{A})=\frac{132}{245} \text{ و } p(X=2)=p(BB)=\frac{74}{245}$$

x_i	0	1	2
$p(X=x_i)$	$\frac{39}{245}$	$\frac{132}{245}$	$\frac{74}{245}$

ب) نحسب الأمل الرياضي $E(X)$.
$$E(X)=\frac{132}{245}+\frac{148}{245}=\frac{280}{245}=\frac{8}{7}\approx 1{,}14$$