تصحيح فرض شهر يناير2005 (2.س.ب.ع.ر)
الرياضيات بالثانوي

التمرين1

1- نحل في $\mathbb{Z}^2$ $\quad 5x-3y=2$

لدينا $(1;1)$ حل للمعادلة ومنه $5(x-1)-3(y-1)=0$ أي $5(x-1)=3(y-1)$

وحيث $5\wedge 3=1$ فانه $\exists k\in\mathbb{Z}/\quad x-1=3k$ أي $\exists k\in\mathbb{Z}/\quad x=3k+1$

وبالتالي $\exists k\in\mathbb{Z}/\quad y-1=5k$ أي $\exists k\in\mathbb{Z}/\quad y=5k+1$

الزوج $(3k+1;5k+1)$ يحقق المعادلة

إذن $S=\{(3k+1;5k+1)/k\in\mathbb{Z}\}$

2- نحدد القيم الممكنة للعددين x و y ثم نكتب A في نظمة العد العشري

لدينا $A=\overline{55}_{(x)}\quad ;\quad A=\overline{37}_{(y)}\quad ;\quad x\le 12\quad y\le 20$

ومنه $A=5x+5\quad ;\quad A=3y+7\quad ;\quad 5\prec x\le 12\quad 7\prec y\le 20\qquad (x;y)\in\mathbb{N}^2$

و بالتالي $A=5x+5\quad ;\quad 5x-3y=2\quad ;\quad 5\prec x\le 12\quad 7\prec y\le 20\qquad (x;y)\in\mathbb{N}^2$

ومنه $A=5x+5\quad ;\quad (3k+1;5k+1)=(x;y)\quad ;\quad 5\prec x\le 12\quad 7\prec y\le 20\qquad (x;y)\in\mathbb{N}^2$

$$\begin{cases}5\prec 3k+1\le 12\\ 7\prec 5k+1\le 20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{4}{3}\prec k\le\frac{11}{3}\\ \frac{6}{5}\prec k\le\frac{19}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{4}{3}\prec k\le\frac{11}{3}\Leftrightarrow k\in\{2;3\}*$$

إذن $(x;y)=(7;11)$ أو $(x;y)=(10;16)$

ومنه $A=40$ أو $A=55$

التمرين2

ليكن a و b عددين مختلفين من $\mathbb{N}^*-\{1\}$ و$n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$

نبين أن إذا كان a^n-b^n عددا أوليا فان n عدد أولي

لنبين أن عدد n غير أولي تستلزم a^n-b^n عدد غير أولي (الاستلزام المضاد للعكس)

n عدد غير أولي ومنه $\exists(p;q)\in\left(\mathbb{N}^*-\{1\}\right)^2/\quad n=pq$

و منه $a^{pq}-b^{pq}=\left(a^p\right)^q-\left(b^p\right)^q=\left(a^p-b^p\right)\left(\sum_{k=0}^{q-1}\left(a^p\right)^k\left(b^b\right)^{q-1-k}\right)$

بما أن a و b عددين مختلفين من $\mathbb{N}^*-\{1\}$ و $(p;q)\in\left(\mathbb{N}^*-\{1\}\right)^2$ فان $\left|a^p-b^p\right|\in\mathbb{N}^*-\{1\}$

و $\sum_{k=0}^{q-1}\left(a^p\right)^k\left(b^b\right)^{q-1-k}\succ 1$

اذن a^n-b^n عدد غير أولي

و منه إذا كان a^n-b^n عددا أوليا فان n عدد أولي

التمرين3

I- f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة على $[-1;+\infty[$ بما يلي

$$\begin{cases} f(x)=\frac{1}{2}\arcsin\sqrt[3]{x+1} & -1\le x \prec 0 \\ f(x)=\arctan\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right) & x\ge 0 \end{cases}$$

1- أ- ندرس اتصال f في النقطة 0

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\arctan\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)=\frac{\pi}{4} \text{ و } \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{2}\arcsin\sqrt[3]{x+1}=\frac{\pi}{4}$$

ومنه $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$ إذن f متصلة في النقطة 0

ب- ندرس اشتقاق f في النقطة 1- على اليمين و نؤول النتيجة هندسيا

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}\frac{1}{2}\left(\frac{\arcsin\sqrt[3]{x+1}}{x+1}\right)=\lim_{x\to -1^+}\frac{1}{2\sqrt[3]{(x+1)^2}}\left(\frac{\arcsin\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}\right)=+\infty$$

لأن $\lim_{x\to -1^+}\frac{\arcsin\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}=1$ et $\lim_{x\to -1^+}\frac{1}{2\sqrt[3]{(x+1)^2}}=+\infty$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق في النقطة 1- على اليمين و (C_f) يقبل نصف مماس عمودي عند النقطة 1- على اليمين

ج- ندرس اشتقاق في f النقطة0 على اليسار ثم على اليمين و أول النتيجتين هندسيا

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{2}\left(\frac{\arcsin\sqrt[3]{x+1}-\frac{\pi}{2}}{x}\right)=\lim_{t\to 1^-}\frac{1}{2}\left(\frac{\arcsin t-\frac{\pi}{2}}{t^3-1}\right)$$

$$=\lim_{t\to 1^-}\frac{1}{2\left(t^2+t+1\right)}\left(\frac{\arcsin t-\frac{\pi}{2}}{t-1}\right)=+\infty$$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق في النقطة 0 على اليسار و (C_f) يقبل نصف مماس عمودي عند النقطة 0 على اليسار

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\arctan\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)-\frac{\pi}{4}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(-1-x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x}\left[\frac{\arctan\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)-\frac{\pi}{4}}{\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)-1}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-2}{\left[\left(\sqrt{x^2+1}\right)+(1+x)\right]}\left[\frac{\arctan\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)-\frac{\pi}{4}}{\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)-1}\right]=-\frac{1}{2}$$

ومنه f قابلة للاشتقاق في النقطة 0 على اليمين و (C_f) يقبل نصف مماس معامله الموجه $-\frac{1}{2}$ عند النقطة 0 على اليمين

2- أ- نبين أن $\forall x \in]-1;0[\quad f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}\sqrt{1-\sqrt[3]{(x+1)^2}}}$

$$\forall x \in]-1;0[\quad f'(x) = \frac{\left[\sqrt[3]{x+1}\right]'}{\sqrt{1-\sqrt[3]{(x+1)^2}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}\sqrt{1-\sqrt[3]{(x+1)^2}}}$$

نبين أن $\forall x \in]0;+\infty[\quad f'(x) = \dfrac{-1}{2(1+x^2)}$

$$\forall x \in]0;+\infty[\quad f'(x) = \frac{\left[-x+\sqrt{x^2+1}\right]'}{1+\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)^2} = \left(-1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\frac{1}{2\left(1+x^2-x\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$= = \left(\frac{-\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)} = \frac{-1}{2(x^2+1)}$$

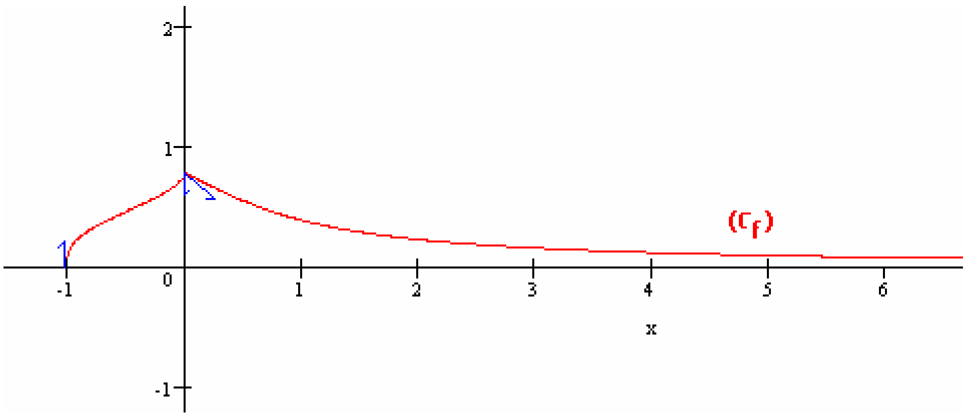
ب- جدول تغيرات الدالة f

$\forall x \in]0;+\infty[\quad f'(x) \prec 0$ و $\forall x \in]-1;0[\quad f'(x) \succ 0$

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	||	-	
f	0	↗	$\dfrac{\pi}{4}$	↘	0

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \arctan\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right) = \lim_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) = 0$$

3- ننشئ C_f



II- (u_n) متتالية حيث $u_0 = \dfrac{1}{2} \quad ; \quad u_{n+1} = g(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ حيث g قصور f على $[0;+\infty[$

1- نبين أن المعادلة $g(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في $]0;1[$

نعتبر $h(x) = g(x) - x$ على $[0;1]$ لدينا h متصلة على $[0;1]$

لدينا $h'(x) = \dfrac{-1}{2(x^2+1)} - 1$ ومنه h تناقصية قطعا على $[0;1]$

لدينا $h(0)\times h(1)=\frac{\pi}{4}\left(\arctan\left(\sqrt{2}-1\right)-1\right)$

$0\prec\sqrt{2}-1\prec\tan\frac{\pi}{4}\prec\tan 1$ (لأن $\frac{\pi}{4}\prec 1$, $\sqrt{2}-1\prec 1$) ومنه $0\prec\arctan\left(\sqrt{2}-1\right)\prec 1$

إذن $h(0)\times h(1)\prec 0$

إذن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $]0;1[$

أي أن المعادلة $g(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α في $]0;1[$

2- نبين أن $|u_{n+1}-\alpha|\prec\frac{4}{5}|u_n-\alpha| \quad \forall n\in\mathbb{N}$

لدينا $g(x)\in\,]0;1[\quad \forall x\in[0;+\infty[$

و حيث $u_0=\frac{1}{2}$; $u_{n+1}=g(u_n) \quad \forall n\in\mathbb{N}$ فان $0\prec u_n\prec 1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$ (نبين ذلك بالترجع)

الدالة g متصلة في مجال مغلق طرفاه α و u_n وقابلة للاشتقاق في مجال مفتوح طرفاه α و u_n

ومنه يوجد c محصور قطعا بين α و u_n حيث $g(u_n)-g(\alpha)=g'(c)(u_n-\alpha)$

أي أن $u_{n+1}-\alpha=\frac{-1}{2\left(1+c^2\right)}(u_n-\alpha)$ ومنه $|u_{n+1}-\alpha|=\frac{1}{2\left(1+c^2\right)}|(u_n-\alpha)|$

و حيث أن $0\prec c\prec 1$ فان $\frac{1}{4}\prec\frac{1}{2\left(1+c^2\right)}\prec\frac{1}{2}\prec\frac{4}{5}$ ومنه $|u_{n+1}-\alpha|\prec\frac{4}{5}|u_n-\alpha| \quad \forall n\in\mathbb{N}$

3- نستنتج أن (u_n) متقاربة محددا نهايتها

لدينا $|u_{n+1}-\alpha|\prec\frac{4}{5}|u_n-\alpha| \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$$|u_1-\alpha|\prec\frac{4}{5}|u_0-\alpha|$$

$$|u_2-\alpha|\prec\frac{4}{5}|u_1-\alpha|$$

$$\vdots$$

$$|u_n-\alpha|\prec\frac{4}{5}|u_{n-1}-\alpha|$$

بضرب أطراف المتفاوتات و الاختزال نحصل على $|u_n-\alpha|\prec\left(\frac{4}{5}\right)^n|u_0-\alpha|$

وحيث $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n|u_0-\alpha|=0$ فان (u_n) متقاربة و $\lim_{n\to+\infty}u_n=\alpha$