تصحيح فرض أكتوبر 2004
موقع الرياضيات بالثانوي

التمرين1

$g(x) = \arcsin\sqrt{1-x^2}$ و $f(x) = 2\sin x$

1- نبين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا في $\left[\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right]$

نعتبر $h(x) = f(x) - x$ $\quad \forall x \in \left[\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right]$

$$h'(x) = 2\cos x - 1 \quad \forall x \in \left[\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right]$$

$h'(x) \prec 0$ $\quad \forall x \in \left[\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right]$ ومنه h تناقصية قطعا على $\left[\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right]$

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot h\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1\times -2 = -2 \prec 0$$

ومنه المعادلة $h(x) = 0$ أي $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا في $\left[\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right]$

2- أ) نحدد D_g

ليكن $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x \in D_g &\Leftrightarrow 0 \le 1-x^2 \le 1 \\ &\Leftrightarrow 0 \le x^2 \le 1 \\ &\Leftrightarrow -1 \le x \le 1 \end{aligned}$$

$$D_g = [-1;1]$$

ب) نحدد $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)$

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} \arcsin\sqrt{1-x^2} = 0$$

ج) نبين أن $\forall x \in [0;1] \quad g(x) + g\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \frac{\pi}{2}$

$$\forall x \in [0;1] \quad g(x) + g\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \arcsin\sqrt{1-x^2} + \arcsin x$$

نضع $\arcsin x = \alpha$ وحيث $x \in [0;1]$ فان $\alpha \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

$$\arcsin x = \alpha \Leftrightarrow x = \sin\alpha$$

$$\arcsin\sqrt{1-(\sin\alpha)^2} = \arcsin(\cos\alpha) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)$$

وحيث $\alpha \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ فان $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ ومنه $\arcsin\sqrt{1-(\sin\alpha)^2} = \frac{\pi}{2}-\alpha$

إذن $\forall x \in [0;1] \quad g(x) + g\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \frac{\pi}{2} - \alpha + \alpha = \frac{\pi}{2}$

التمرين2

ليكن α عددا حقيقيا حيث $\sin\alpha \ne 0$ و (w_n) متتالية عددية معرفة بما يلي:

$$\begin{cases} w_0 = w_1 = 1 \\ w_{n+2} - 4(\cos\alpha)w_{n+1} + 4w_n = 0 \end{cases}$$

1- نحل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-4(\cos\alpha)z+4=0$

ليكن Δ المميز المختصر : $\Delta=4\cos^2\alpha-4=-4\sin^2\alpha=(2i\sin\alpha)^2$

ومنه $z=2\cos\alpha+2i\sin\alpha$ أو $z=2\cos\alpha-2i\sin\alpha$

إذن $S=\{2\cos\alpha-2i\sin\alpha;2\cos\alpha+2i\sin\alpha\}$

2- نحدد w_n بدلالة n

لدينا المعادلة المميزة $w_{n+2}-4(\cos\alpha)w_{n+1}+4w_n=0$ هي $z^2-4(\cos\alpha)z+4=0$

ومنه $z=[2;n]$ أو $z=[2;-\alpha]$

و بالتالي $w_n=2^n\left(a\cdot\cos(n\alpha)+b\cdot\sin(n\alpha)\right)$

وحيث أن $\sin\alpha\neq0$ فان $w_0=w_1=1\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\2(a\cos\alpha+b\sin\alpha)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=\dfrac{1-2\cos\alpha}{2\sin\alpha}\end{cases}$

ومنه $w_n=2^n\left(\cos(n\alpha)+\dfrac{1-2\cos\alpha}{2\sin\alpha}\sin(n\alpha)\right)$

التمرين3

$\begin{cases}v_1=12\\v_{n+1}=\dfrac{u_n+3v_n}{4}\end{cases}$ $\begin{cases}u_1=1\\u_{n+1}=\dfrac{u_n+2v_n}{3}\end{cases}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$ ، $w_n=v_n-u_n$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

1- نبين أن $(w_n)_{n\geq1}$ متتالية هندسية و نحسب w_n بدلالة n

ليكن $n\in\mathbb{N}$

$$w_{n+1}=v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{u_n+2v_n}{3}-\frac{u_n+3v_n}{4}$$

$$w_{n+1}=-\frac{1}{12}(v_n-u_n)$$

$$w_{n+1}=-\frac{1}{12}w_n$$

ومنه $(w_n)_{n\geq1}$ متتالية هندسية أساسها $\dfrac{-1}{12}$ و حدها الأول $w_1=11$

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad w_n=11\left(-\frac{1}{12}\right)^{n-1}$$

أ- نحدد $\lim w_n$

$$\lim w_n=\lim 11\left(-\frac{1}{12}\right)^{n-1}=0$$

2-- أ- نبين أن $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية تزايدية و أن $(v_n)_{n\geq1}$ متتالية تناقصية

ليكن $n\in\mathbb{N}$

* $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n+2v_n}{3}-u_n=\dfrac{2}{3}(v_n-u_n)=\dfrac{2}{3}w_n$

وحيث أن $w_n\succ0$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$ فان $u_{n+1}-u_n\succ0$ إذن $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية تزايدية

* $v_{n+1}-v_n=\dfrac{u_n+3v_n}{4}-v_n=\dfrac{-1}{4}(v_n-u_n)=\dfrac{-1}{3}w_n$ ومنه $v_{n+1}-v_n\prec0$

إذن $(v_n)_{n\geq1}$ متتالية تناقصية

ب- نبين بالترجع أن $u_n\prec v_n$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

من أجل $n=1$ لدينا $u_1 \prec v_1$

نفترض أن $u_n \prec v_n$ عبارة صحيحة حتى الرتبة n

نبين أن $u_{n+1} \prec v_{n+1}$

$$v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{u_n+3v_n}{4}-\frac{u_n+2v_n}{3}=\frac{v_n-u_n}{12}$$

وحيث أن $u_n \prec v_n$ فان $u_{n+1} \prec v_{n+1}$.

إذن $u_n \prec v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

ج- نستنتج أن $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ متقاربتين

لدينا $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية تزايدية و أن $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية تناقصية و $u_n \prec v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

و منه $u_0 \leq u_n \prec v_1 \leq v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية تزايدية و مكبورة بالعدد v_1 اذن $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربة.

$(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية تناقصية و مصغورة بالعدد u_1 اذن $(v_n)_{n\geq 1}$ متقاربة.

التمرين4

نعتبر المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر

وليكن f التطبيق من $\mathbb{C}^*$ إلى $\mathbb{C}$ بحيث $f(z)=\frac{\overline{z}+i}{z}$

1- نحدد مجموعة النقط M التي لحقها z بحيث $|f(z)|=1$.

ليكن $z \in \mathbb{C}^*$ نضع $z=x+iy$ حيث $(x;y)\in \mathbb{R}^2$ و $(x;y)\neq(0;0)$

$$|f(z)|=1 \Leftrightarrow \left|\frac{\overline{z}+i}{z}\right|=1 \Leftrightarrow |\overline{z}+i|=|z| \Leftrightarrow x^2+(1-y)^2=x^2+y^2 \Leftrightarrow 2y-1=0$$

إذن مجموعة النقط M التي لحقها z بحيث $|f(z)|=1$ هي المستقم الذي معادلته $y=\frac{1}{2}$

2- نحل في $\mathbb{C}$ المعادلة $f\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)=z\cdot\overline{z}(1+i)$

$$z\in\mathbb{C}^* \quad f\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)=z\cdot\overline{z}(1+i) \Leftrightarrow z\in\mathbb{C}^* \quad z\frac{1+i\overline{z}}{\overline{z}}=z\cdot\overline{z}(1+i)$$

$$\Leftrightarrow z\in\mathbb{C}^* \quad z\left((1+i)\overline{z}^2-i\overline{z}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow z\in\mathbb{C}^* \quad (1+i)\overline{z}^2-i\overline{z}-1=0$$

ليكن $\Delta=-1+4+4i=3+4i=(i+2)^2$ مميز $(1+i)\overline{z}^2-i\overline{z}-1=0$

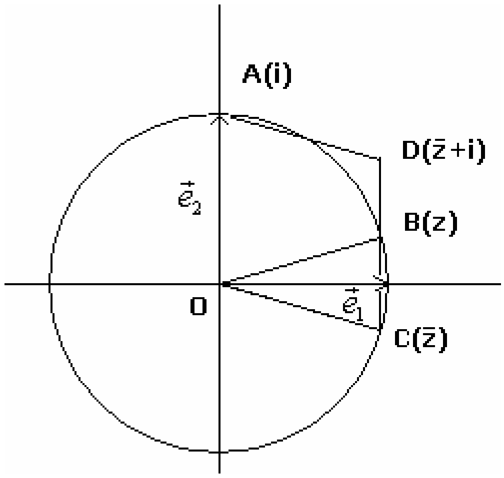
ومنه $\overline{z}=\frac{i+2+i}{2(1+i)}=1$ أو $z=\frac{i-i-2}{2(1+i)}=\frac{-(1-i)}{2}=\frac{-1+i}{2}$

$z=1$ أو $z=\frac{-1-i}{2}$

إذن $S=\left\{1;\frac{-1-i}{2}\right\}$

3- نضع $z=\cos\theta+i\sin\theta$ حيث $\theta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

أ- نمثل النقط $A(i)$ و $B(z)$ و $C(\overline{z})$ و $D(\overline{z}+i)$



ب- نتحقق أن $OCDA$ معين و نستنتج عمدة $\overline{z}+i$ بدلالة θ ثم عمدة $f(z)$ بدلالة θ

$$OC=|\overline{z}|=1 \quad ; \quad OA=|i|=1 \quad ; \quad CD=|i|=1 \quad ; \quad AD=|\overline{z}|=1$$

ومنه $OCDA$ معين

(OD) منصف $\left[\widehat{COA}\right]$ و منه: $\quad \left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD}\right)\equiv\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}\right) \quad [2\pi]$

$$\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD}\right) \equiv \frac{1}{2}\left(\arg(\overline{z})-\arg(i)\right) \quad [2\pi]$$

$$\equiv \frac{1}{2}\left(-\theta-\frac{\pi}{2}\right) \quad [2\pi]$$

$$\arg(\overline{z}+i)\equiv\left(\vec{e}_1;\overrightarrow{OD}\right) \quad [2\pi]$$

$$\arg(\overline{z}+i)\equiv\left(\vec{e}_1;\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD}\right) \quad [2\pi]$$

$$\arg(\overline{z}+i)\equiv\arg(i)+\frac{1}{2}\left(-\theta-\frac{\pi}{2}\right) \quad [2\pi]$$

$$\arg(\overline{z}+i)\equiv\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\left(-\theta-\frac{\pi}{2}\right) \quad [2\pi]$$

$$\arg(\overline{z}+i)\equiv-\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$$

لدينا $\arg(f(z))=\arg\left(\frac{\overline{z}+i}{z}\right)$ ومنه $\arg(f(z))\equiv\arg(\overline{z}+i)-\arg(z) \quad [2\pi]$

$$\arg(f(z))\equiv\frac{-\theta}{2}+\frac{\pi}{4}-\theta \quad [2\pi]$$

$$\arg(f(z))\equiv\frac{-3\theta}{2}+\frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$$

ج- نحدد معيار $f(z)$ بدلالة θ

لدينا $z=\cos\theta+i\sin\theta$ ومنه $|z|=1$ و بالتالي

$$|f(z)|=\left|\frac{\overline{z}+i}{z}\right|=|\overline{z}+i|=\sqrt{\left(\cos^2\theta+(1-\sin\theta)^2\right)}=\sqrt{2-2\sin\theta}$$