تمرين1

$a_n = 4 \times 10^n - 1$ و $b_n = 2 \times 10^n - 1$ و $c_n = 2 \times 10^n + 1$

-1

أ/ نحسب b_1 ، c_1 ، a_2 ، b_2 ، c_2 ، a_3، b_3، c_3.

$c_1 = 2 \times 10^1 + 1 = 21$ $\quad b_1 = 2 \times 10^1 - 1 = 19$ $\quad a_1 = 4 \times 10^1 - 1 = 39$

$c_2 = 2 \times 10^2 + 1 = 201$ $\quad b_2 = 2 \times 10^2 - 1 = 199$ $\quad a_2 = 4 \times 10^2 - 1 = 399$

$c_3 = 2 \times 10^3 + 1 = 2001$ $\quad b_3 = 2 \times 10^3 - 1 = 1999$ $\quad a_3 = 4 \times 10^3 - 1 = 3999$

ب/ نبين أن a_n و c_n قابلان للقسمة على 3

لدينا $10 \equiv 1 \quad [3]$ ومنه $10^n \equiv 1 \quad [3]$ و حيث ان $4 \equiv 1 \quad [3]$ فان $4 \times 10^n \equiv 1$

ومنه $4 \times 10^n - 1 \equiv 0 \quad [3]$ أي $a_n \equiv 0 \quad [3]$

لدينا $10^n \equiv 1 \quad [3]$ ومنه $2 \times 10^n \equiv 2 \quad [3]$ أي $2 \times 10^n \equiv -1 \quad [3]$

ومنه $2 \times 10^n + 1 \equiv 0 \quad [3]$ اذن $c_n \equiv 0 \quad [3]$

إذن a_n و c_n يقبلان القسمة على 3

ج/ نبين أن b_3 عدد أولي

لدينا $b_3 = 1999$ و 1999 لا يقبل القسمة على الأعداد الأولية التي أصغر أو تساوي 47

و $47^2 = 2209 \succ 1999$

إذن b_3 عدد أولي

د/ نبين أن لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n : $b_n \times c_n = a_{2n}$

ليكن $n \in \mathbb{N}$

$$b_n \times c_n = (2 \times 10^n - 1)(2 \times 10^n + 1) = (2 \times 10^n)^2 - 1^2 = 4 \times 10^{2n} - 1 = a_{2n}$$

نستنتج التفكيك إلى جداء عوامل أولية للعدد a_6

$a_6 = b_3 \times c_3 = 1999 \times 2001$ و $2001 = 3 \times 23 \times 29$

$a_6 = 3 \times 23 \times 29 \times 1999$

ه/ نبين أن $PGCD(b_n ; c_n) = PGCD(b_n ; 2)$

$$c_n = 2 \times 10^n + 1 = 2 \times 10^n - 1 + 2 = b_n + 2$$

إذا كان d قاسم مشترك للعددين c_n و b_n فان d قاسم للعدد2 لان $c_n - b_n = 2$

إذا كان d قاسم مشترك للعددين b_n و 2 فانه قاسم للعدد c_n لان $c_n = b_n + 2$

ومنه مجموعة القواسم المشتركة للعدين c_n و b_n هي مجموعة قواسم العددين b_n و 2

إذن $PGCD(b_n ; c_n) = PGCD(b_n ; 2)$

نستنتج أن c_n و b_n أوليين فيما بينهما

لدينا $b_n = 2 \times 10^n - 1$ ومنه b_n فردي و بالتالي $PGCD(b_n ; 2) = 1$

ومنه $PGCD(b_n ; c_n) = 1$ إذن c_n و b_n أوليين فيما بينهما

-2 نعتبر المعادلة $b_3 x + c_3 y = 1 \qquad (x;y) \in \mathbb{Z}^2 \quad (E):$

أ/ علل أن المعادلة (E) تقبل على الأقل حلا

لدينا $PGCD(b_n ; c_n) = 1$ ومنه $PGCD(b_3 ; c_3) = 1$ و بالتالي حسب مبرهنة Bezout

فانه يوجد $(u;v)$ من $\mathbb{Z}^2$ حيث $b_3 u + c_3 v = 1$

إذن المعادلة (E) تقبل على الأقل حلا

ب/ بتطبيق خوارزمية اقليدس على العددين c_3 و b_3 حدد حلا خاصا للمعادلة (E)

لدينا $1999 = 999 \times 2 + 1 \quad ; \quad 2001 = 1999 + 2$

ومنه $1 = 1999 - 999 \times 2 = 1999 - 999 \times (2001 - 1999) = 1999 - 999 \times 2001 + 999 \times 1999$

أي $1 = 1000 \times 1999 - 999 \times 2001$

إذن $1 = 1000 \times b_3 - 999 \times c_3$ ومنه $(1000 ; -999)$ حل خاص للمعادلة (E)

ج/ نحل المعادلة (E)

$$(E): \quad (x;y) \in \mathbb{Z}^2 \quad 1999x + 2001y = 1$$

لدينا $1 = 1000 \times 1999 - 999 \times 2001$

ومنه $1999(x - 1000) + 2001(y + 999) = 0$ أي $1999(1000 - x) = 2001(y + 999)$

وحيث $PGCD(1999 ; 2001) = 1$ فان $\exists k \in \mathbb{Z} / \quad y + 999 = 1999k$

أي $\exists k \in \mathbb{Z} / \quad y = 1999k - 999$ ومنه $x = 1000 - 2001k$

و بالتالي $(1000 - 2001k ; 1999k - 999)$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

عكسيا لدينا

$$1999x + 2001y = 1999(1000 - 2001k) + 2001(1999k - 999) = 1999000 - 1998999 = 1$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة هي $\{(1000 - 2001k ; 1999k - 999) / k \in \mathbb{Z}\}$

تمرين2

نعتبر الدالة f المعرفة بـ $f(x) = \dfrac{x}{1 + x + x^2}$

لتكن (u_n) المتتالية العددية حيث $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

-1 ندرس تغيرات f

$1 + x + x^2 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ومنه $D_f = \mathbb{R}$

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x) = \dfrac{1 + x + x^2 - 2x^2 - x}{(1 + x + x^2)^2} = \dfrac{1 - x^2}{(1 + x + x^2)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

و بالتالي اشارة $f'(x)$ هي اشارة $1 - x^2$

ومنه f تزايدية على $[-1;1]$ و تناقصية على كل من المجالين $]-\infty;-1[$ و $]1;+\infty[$

-2 نبين أن $f\left(\dfrac{1}{p}\right) \leq \dfrac{1}{p+1} \quad \forall p \in \mathbb{N}^*$

لدينا $f\left(\dfrac{1}{p}\right) = \dfrac{\frac{1}{p}}{1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}} = \dfrac{p}{1 + p + p^2}$

$\dfrac{1}{p+1} - f\left(\dfrac{1}{p}\right) = \dfrac{1}{p+1} - \dfrac{p}{1 + p + p^2} = \dfrac{1}{(1 + p + p^2)(p+1)} \succ 0$ ومنه $f\left(\dfrac{1}{p}\right) \leq \dfrac{1}{p+1} \quad \forall p \in \mathbb{N}^*$

-3 نبين أن $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ (يمكن الاستعانة بتغيرات f على $[0;1]$)

لدينا $0 \leq u_1 = \dfrac{1}{3} \leq \dfrac{1}{1+1}$

نفترض أن $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$ و نبين أن $0 \leq u_{n+1} \leq \dfrac{1}{n+2}$

ومنه $0 \le u_n \le \frac{1}{n+1} \le 1$ و حيث f تزايدية فان $f(0) \le f(u_n) \le f\left(\frac{1}{n+1}\right)$

و بالتالي $0 \le u_{n+1} \le f\left(\frac{1}{n+1}\right) \le \frac{1}{n+1}$

إذن $0 \le u_n \le \frac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

4- ندرس رتابة (u_n)

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \frac{u_n}{1+u_n+u_n^2} - u_n = -u_n^2 \frac{(1+u_n)}{1+u_n+u_n^2}$$

و حيث $u_n \ge 0$ فان $u_{n+1} - u_n \le 0$ اذن (u_n) تناقصية

5- استنتج أن (u_n) متقاربة و حدد $\lim u_n$

لدينا (u_n) تناقصية و مصغورة و منه (u_n) متقاربة

و حيث أن $0 \le u_n \le \frac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ و $\lim \frac{1}{n+1} = 0$ فان $\lim u_n = 0$

تمرين3

نعتبر الدالة f المعرفة بـ $\begin{cases} f(x) = x-1+\sqrt{x^2+1} & x \prec 0 \\ f(x) = \sqrt[3]{x - \arctan x} & x \ge 0 \end{cases}$

1- أ/ نبين أن $\arctan x \le x \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

نعتبر $f_2(x) = x \qquad f_1(x) = \arctan x \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$

لدينا $f_2'(x) = 1 \qquad f_1'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$ ومنه $f_1'(x) \le f_2'(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$

وحيث أن $f_1(0) = f_2(0)$ فان $f_1(x) \le f_2(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$

أي أن $\arctan x \le x \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

ب/ نبين أن $x - \frac{x^3}{3} \le \arctan x \le x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

نعتبر $f_4(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \qquad f_3(x) = x - \frac{x^3}{3} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$

و منه $f_4'(x) = 1 - x^2 + x^4 \qquad f_3'(x) = 1 - x^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f_1'(x) - f_3'(x) = \frac{1}{x^2+1} - (1-x^2) = \frac{x^4}{x^2+1} \ge 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f_4'(x) - f_1'(x) = 1 - x^2 + x^4 - \frac{1}{x^2+1} = \frac{x^6}{x^2+1} \ge 0$$

ومنه $f_3'(x) \le f_1'(x) \le f_4'(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$

و حيث أن $f_3(x) = f_1(x) = f_4(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$

إذن $f_3(x) \le f_1(x) \le f_4(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$

أي أن $x - \frac{x^3}{3} \le \arctan x \le x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

د/ نحدد $\lim_{x \to 0^+} \frac{x - \arctan x}{x^3}$

لدينا $\forall x\in\mathbb{R}^+ \quad x-\frac{x^3}{3}\le \arctan x\le x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}$

ومنه $\forall x\in\mathbb{R}^+ \quad \frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\le x-\arctan x\le \frac{x^3}{3}$

و بالتالي $\forall x\in\mathbb{R}^{+*} \quad \frac{1}{3}-\frac{x^2}{5}\le \frac{x-\arctan x}{x^3}\le \frac{1}{3}$

و حيث $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{3}-\frac{x^2}{5}=\frac{1}{3}$ فان $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x-\arctan x}{x^3}=\frac{1}{3}$

ج/ ندرس قابلية f الاشتقاق في 0

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{x-\arctan x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt[3]{\frac{x-\arctan x}{x^3}}=\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على يمين 0 و $f_d'(0)=\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-1+\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-2x}{x\left(x-1-\sqrt{x^2+1}\right)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-2}{x-1-\sqrt{x^2+1}}=1$$

إذن f قابلة للاشتقاق على يسار 0 و $f_g'(0)=1$

ه/ ندرس تغيرات الدالة f

$$\forall x\in\left]-\infty;0\right[\qquad f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}\succ 0$$

$$\forall x\in\left]0;+\infty\right[\qquad f'(x)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)(x-\arctan x)^{-\frac{2}{3}}=\frac{x^2}{3\left(x^2+1\right)\sqrt[3]{x-\arctan x}^2}\succ 0$$

إذن f تزايدية على $\mathbb{R}$

-2 $u_0=1$ و $u_{n+1}=\sqrt[3]{u_n-\arctan u_n}$

أ/ نبين أن (u_n) تناقصية

لنبين أن $u_{n+1}\le u_n \qquad \forall n\in\mathbb{N}$

لدينا $u_0=1$ و $u_1=\sqrt[3]{1-\arctan 1}$ و منه $u_1\prec u_0$

نفترض أن $u_{n+1}\le u_n$ عبارة صحيحة حتى الرتبة n لنبين $u_{n+2}\le u_{n+1}$

لدينا $u_{n+1}\le u_n$ و f تزايدية على $\mathbb{R}$

ومنه $f(u_{n+1})\le f(u_n)$ أي أن $u_{n+2}\le u_{n+1}$

إذن $u_{n+1}\le u_n \qquad \forall n\in\mathbb{N}$ و بالتالي (u_n) تناقصية

نستنتج أن (u_n) متقاربة

من خلال صيغة الصريحة للمتتالية لدينا $u_n\ge 0 \qquad \forall n\in\mathbb{N}$

ومنه (u_n) مصغورة و حيث أنها تناقصية فان (u_n) متقاربة

ب/ نستنتج أن $0\le u_n\le\sqrt[3]{\frac{1}{3}} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

لدينا $\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\le x-\arctan x\le\frac{x^3}{3} \quad \forall x\in\mathbb{R}^+$ و $\arctan x\le x \quad \forall x\in\mathbb{R}^+$

وحيث أن $u_n\ge 0 \qquad \forall n\in\mathbb{N}$ فان $0\le u_n-\arctan u_n\le\frac{u_n^{\,3}}{3}$

و منه $0 \le \sqrt[3]{u_n - \arctan u_n} \le \sqrt[3]{\frac{{u_n}^3}{3}}$ أي $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \le u_{n+1} \le \frac{u_n}{\sqrt[3]{3}}$

و بما أن (u_n) تناقصية فان $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_0 \ge u_n$ و منه $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 \ge u_n$

و بالتالي $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \ge \frac{u_n}{\sqrt[3]{3}}$ إذن $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \le u_{n+1} \le \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \le u_{n+1} \le \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

*- نحدد $\lim u_n$

لدينا $u_{n+1} = f(u_n)$ و f متصلة على $\mathbb{R}^+$ و $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$

ومنه $\lim u_n$ حل للمعادلة $f(x) = x$

$$f(x) = x \Leftrightarrow x^3 - (x - \arctan x) = 0$$

و حيث $\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \le x - \arctan x \le \frac{x^3}{3}$ $\forall x \in \mathbb{R}^+$ و $\frac{x^3}{3} \prec x^3$ $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$

ومنه $x - \arctan x \prec x^3$ $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$

و حيث $f(0) = 0$ فان $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا هو 0

إذن $\lim u_n = 0$