

التمرين 1

$$\begin{cases} f(x) = \arcsin(x^2 - 2x) & x \in [0,1[\\ f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x^2} & x \notin [0,1[\end{cases}$$

1- ندرس اشتقاق f في 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arcsin(x^2 - 2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arcsin(x^2 - 2x)}{x^2 - 2x} \times (x - 2) = 1 \times -2 = -2$$

ومنه $f'_d(0) = -2$

$$\forall x \in \mathbb{R} - [0,1[\quad \left| \frac{f(x)}{x} \right| = \left| x \cos \frac{1}{x^2} \right| \leq |x|$$

$$\text{وحيث أن } \lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = 0 \text{ فان } \lim_{x \rightarrow 0^-} \left| \frac{f(x)}{x} \right| = 0 \text{ اذن } f'_g(0) = 0$$

f غير قابلة للاشتقاق في 0

2- نحدد الدالة المشتقة f' بعد تحديد حيز تعريفها

الدالة $x \rightarrow \arcsin(x^2 - 2x)$ قابلة للاشتقاق على $]0;1[$ (مركب دالتين قابلتين للاشتقاق)

الدالة $x \rightarrow x^2 \cos \frac{1}{x^2}$ قابلة للاشتقاق في كل نقطة من $]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$

- لدينا $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \cos 1$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{-\pi}{2}$ ومنه f غير متصلة في 1

- f غير قابلة للاشتقاق في 0

$$\text{اذن } D_{f'} = \mathbb{R}^* - \{1\}$$

$$\forall x \in]0;1[\quad f'(x) = \frac{2x-2}{\sqrt{1-(x^2-2x)}}$$

$$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[\quad f'(x) = 2x \cos \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} \sin \frac{1}{x^2}$$

التمرين 2

$f(x) = \frac{1}{4} \tan \frac{1}{x+1}$ دالة عددية معرفة على $[0;1]$ بما يلي

1- نبين أن f قابلة للاشتقاق على $[0;1]$ وأن $\forall x \in [0;1] \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{4 \cos^2 1}$

$\forall x \in [0;1] \quad \frac{1}{x+1} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$ و $[0;1]$ قابلة للاشتقاق على $\frac{1}{x+1}$

اذن f قابلة للاشتقاق على $[0;1]$

$$\forall x \in [0;1] \quad f'(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{-1}{(x+1)^2} \right) \left[1 + \tan^2 \frac{1}{x+1} \right] = \frac{1}{4} \left(\frac{-1}{(x+1)^2} \right) \left[\frac{1}{\cos^2 \left(\frac{1}{x+1} \right)} \right] \text{ و}$$

$$\forall x \in [0;1] \quad |f'(x)| = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(x+1)^2} \right) \left[\frac{1}{\cos^2 \left(\frac{1}{x+1} \right)} \right]$$

$\forall x \in [0;1] \quad \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x+1} \leq 1$ و $[0;1]$ تناقصيتان على $x \rightarrow \frac{1}{(x+1)^2}$ و $x \rightarrow \cos x$ الدالتان

$$\forall x \in [0;1] \quad \frac{1}{4} \leq \frac{1}{(x+1)^2} \leq 1 \quad ; \quad 1 \leq \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{x+1}} \leq \frac{1}{\cos^2 1}$$

$$\forall x \in [0;1] \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{4 \cos^2 1} \quad \text{إذن}$$

-2 نبين أن $f([0;1]) \subset [0;1]$

$$\forall x \in [0;1] \quad f'(x) \leq 0 \quad \text{و} \quad \forall x \in [0;1] \quad f'(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{-1}{(x+1)^2} \right) \left[\frac{1}{\cos^2 \left(\frac{1}{x+1} \right)} \right]$$

إذن f تناقصية على $[0;1]$ ومنه $f([0;1]) = \left[\frac{1}{4} \tan \frac{1}{2}; \frac{1}{4} \tan 1 \right] \subset [0;1]$

-3 أ- نبين أنه : $\exists! \alpha \in]0;1[\quad f(\alpha) = \alpha$

نعتبر الدالة g المعرفة على $[0;1]$ بـ $g(x) = f(x) - x$
 g متصلة على $[0;1]$

$$g(1) = -1 + \frac{1}{4} \tan \frac{1}{2} \leq 0 \quad \text{و} \quad g(0) = \frac{1}{4} \tan(1) \geq 0$$

$$\text{إذن} \quad \exists! \alpha \in]0;1[\quad f(\alpha) = \alpha$$

$$\forall x \in]0;1[- \{ \alpha \} \quad |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4 \cos^2 1} |x - \alpha|$$

ليكن $x \in]0;1[- \{ \alpha \}$

لدينا f متصلة على مجال مغلق طرفاه α و x

f قابلة للاشتقاق على مجال I مفتوح طرفاه α و x

ومنه يوجد عدد c ينتمي إلى I حيث $f(x) - f(\alpha) = f'(c)(x - \alpha)$

$$\forall x \in]0;1[- \{ \alpha \} \quad |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4 \cos^2 1} |x - \alpha| \quad \text{فان} \quad \forall x \in [0;1] \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{4 \cos^2 1}$$

$$\begin{cases} u_0 \in]0;1[- \{ \alpha \} \\ u_{n+1} = \frac{1}{4} \tan \left(\frac{1}{u_n + 1} \right) \end{cases} \quad -4$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4 \cos^2 1} \right)^n |u_0 - \alpha| \quad \text{أ- نبين أن}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{4} \tan \left(\frac{1}{u_n + 1} \right) = f(u_n) \quad \text{لدينا}$$

نبين بالترجع أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in]0;1[- \{ \alpha \}$

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4 \cos^2 1} |u_n - \alpha| \quad \text{و بالتالي} \quad |f(u_n) - \alpha| \leq \frac{1}{4 \cos^2 1} |u_n - \alpha| \quad \text{ومنه}$$

$$|u_1 - \alpha| \leq \frac{1}{4 \cos^2 1} |u_0 - \alpha| \quad \text{لدينا } n = 0$$

$$|u_2 - \alpha| \leq \frac{1}{4 \cos^2 1} |u_1 - \alpha| \quad \text{لدينا } n = 1$$

.....
.....
.....

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4 \cos^2 1} |u_{n-1} - \alpha|$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4 \cos^2 1} \right)^n |u_0 - \alpha| \quad \text{بضرب أطراف المتفاوتات والاختزال نحصل على}$$

ب- نستنتج أن (u_n) متقاربة و حدد نهايتها.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4 \cos^2 1} \right)^n |u_0 - \alpha| \quad \text{لدينا}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{4 \cos 1} \right]^n = 0 \quad \text{متقاربة و} \quad \left(\left[\frac{1}{4 \cos 1} \right]^n \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{المتتالية}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha \quad \text{ومنه } (u_n) \quad \text{متقاربة و}$$

التمرين 3

$$A = \{(x; y) \in \mathbb{Z}^2 / bx + (b+1)y = 1\} \quad \text{ليكن } b \in \mathbb{N}^*$$

$$\forall (x; y) \in \mathbb{Z}^2 \quad [(x; y) \in A \Leftrightarrow b(x-b) + (b+1)(y+b-1) = 0] \quad \text{-1 نبين أن}$$

$$\forall (x; y) \in \mathbb{Z}^2 \quad [(x; y) \in A \Leftrightarrow bx + (b+1)y = 1]$$

$$\forall (x; y) \in \mathbb{Z}^2 \quad [(x; y) \in A \Leftrightarrow bx + (b+1)y - b^2 + b^2 - 1 = 0]$$

$$\forall (x; y) \in \mathbb{Z}^2 \quad [(x; y) \in A \Leftrightarrow b(x-b) + (b+1)(y+b-1) = 0]$$

-2 نحدد المجموعة A

$$\forall (x; y) \in \mathbb{Z}^2 \quad [(x; y) \in A \Leftrightarrow b(x-b) + (b+1)(y+b-1) = 0] \quad \text{لدينا}$$

$$\forall (x; y) \in \mathbb{Z}^2 \quad [(x; y) \in A \Leftrightarrow b(x-b) = -(b+1)(y+b-1)] \quad \text{ومنه}$$

$$\exists k \in \mathbb{Z} / y + b - 1 = kb \quad \text{وحيث } b \wedge (b+1) = 1 \quad \text{فان حسب كوف}$$

$$\exists k \in \mathbb{Z} / y = kb - b + 1 \quad \text{و بالتالي}$$

$$x = b - (b+1)k \quad \text{فان } b \in \mathbb{N}^* \quad \text{وحيث } b(x-b) + (b+1)kb = 0 \quad \text{ومنه}$$

$$A = \{(b - (b+1)k; kb - b + 1) / k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{إذن}$$

التمرين 4

$$d = (n^2 + 1) \wedge (n+1) \quad \text{ليكن } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{-1 نحدد العدد } d \quad \text{حسب زوجية } n$$

$$d = (n^2 + 1) \wedge (n+1) = [(n+1)^2 - 2n] \wedge (n+1) = -2n \wedge (n+1)$$

بما أن $n \wedge (n+1) = 1$ فان:

$$d = -2n \wedge (n+1) = 2 \quad \text{إذا كان } n \quad \text{فردى أي } n+1 \quad \text{زوجي فان}$$

إذا كان n زوجي فإن $(n+1) \wedge 2 = 1$ ومنه $d = -2n \wedge (n+1) = 1$

ب- نبين أن $n^2 + 1$ ليس مربعاً كاملاً لكل n من \mathbb{N}^*

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n^2 < n^2 + 1 < n^2 + 1 + 2n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n^2 < n^2 + 1 < (n+1)^2$$

إذن $n^2 + 1$ ليس مربعاً كاملاً لكل n من \mathbb{N}^*

2- a و b و n أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة حيث $a \wedge b = 1$ و $a(n^2 + 1) = b^2(n+1)$

أ- نبين أن $a \wedge b^2 = 1$ و $a \leq n$ و $b \leq n$

* لدينا $a \wedge b = 1$ ومنه حسب Bezout يوجد $(u; v)$ من \mathbb{Z}^2 حيث $au + bv = 1$

$$\text{ومنه } (au + bv)^2 = 1 \text{ أي } a(au^2 + 2buv) + b^2v^2 = 1$$

ومنه حسب Bezout : $a \wedge b^2 = 1$

* لدينا $a(n^2 + 1) = b^2(n+1)$ و منه $a | b^2(n+1)$ و $b^2 | a(n^2 + 1)$

و حيث $a \wedge b^2 = 1$ فانه حسب كوص $a | (n+1)$ و $b^2 | (n^2 + 1)$

$$\text{ومنه } a \leq (n+1) \text{ و } b^2 \leq (n^2 + 1) < (n+1)^2$$

$$\text{ومنه } b < n+1 \text{ أي } b \leq n$$

لنفرض $a = n+1$ و حيث $a(n^2 + 1) = b^2(n+1)$ فإن $n^2 + 1 = b^2$

و هذا غير ممكن لأن $n^2 + 1$ ليس مربعاً كاملاً إذن $a \neq n+1$

و حيث $a \leq (n+1)$ فإن $a \leq n$

ب- نبين أن $(n^2 + 1) \wedge (n+1) = 2$

$$\text{رأينا } (n^2 + 1) \wedge (n+1) = 2 \text{ أو } (n^2 + 1) \wedge (n+1) = 1$$

$$\text{لنفترض أن } (n^2 + 1) \wedge (n+1) = 1$$

و حيث أن $a(n^2 + 1) = b^2(n+1)$ فإن $n+1 | a(n^2 + 1)$

و منه حسب كوص $n+1 | a$ و بالتالي $n+1 \leq a$ و هذا غير ممكن لأن $a \leq n$

$$\text{إذن } (n^2 + 1) \wedge (n+1) \neq 1 \text{ و بالتالي } (n^2 + 1) \wedge (n+1) = 2$$

ج- نضع $n^2 + 1 = 2p$; $n+1 = 2q$ بحيث $(p; q) \in \mathbb{N}^{*2}$ و $p \wedge q = 1$

$$\text{نبين أن } a = q \text{ ; } b^2 = p$$

$$\text{لدينا } a(n^2 + 1) = b^2(n+1) \text{ و } n^2 + 1 = 2p \text{ ; } n+1 = 2q$$

$$\text{ومنهم } ap = b^2q \text{ ومنهم } q | ap \text{ ; } p | b^2q \text{ ; } b^2 | ap \text{ ; } a | b^2q$$

و حيث $p \wedge q = 1$ و $a \wedge b^2 = 1$ فان حسب كوص:

$$a | q \text{ ; } b^2 | p \text{ ; } p | b^2 \text{ ; } q | a$$

$$\text{و التالي } q \leq a \text{ ; } p \leq b^2 \text{ ; } b^2 \leq p \text{ ; } a \leq q$$

$$\text{إذن } a = q \text{ ; } b^2 = p$$

د- نحسب a و b و n

a و b و n من \mathbb{N}^*

لدينا $b = a + 1$ ومنه $a \wedge b = 1$
و بالتالي حسب (ج) لدينا $n^2 + 1 = 2b^2 = 2(a + 1)^2$ و $n + 1 = 2a$
ومنه $(2a - 1)^2 + 1 = 2(a + 1)^2$ و بالتالي $2a^2 - 8a = 0$
ومنه $a = 4$ و بالتالي $b = 5$ و $n = 7$