تمرين1

نعتبر الدالة F المعرفة على $[0;+\infty[$ بما يلي:

$$F(0)=\ln(2) \quad ; \quad \forall x \succ 0 \quad F(x)=\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$$

-1 نبين أن $\forall x \geq 0 \quad e^x \ln 2 \leq F(x) \leq e^{2x} \ln 2$

من أجل $x=0$ المتفاوتة بديهية

ليكن $x \in]0;+\infty[$

$$x \leq t \leq 2x \Leftrightarrow e^x \leq e^t \leq e^{2x} \Leftrightarrow \frac{e^x}{t} \leq \frac{e^t}{t} \leq \frac{e^{2x}}{t}$$

$$\Leftrightarrow \int_x^{2x}\frac{e^x}{t}dt \leq \int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt \leq \int_x^{2x}\frac{e^{2x}}{t}dt$$

$$\Leftrightarrow e^x[\ln t]_x^{2x} \leq \int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt \leq e^{2x}[\ln t]_x^{2x}$$

$$\Leftrightarrow e^x[\ln 2x-\ln x] \leq \int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt \leq e^{2x}[\ln 2x-\ln x]$$

$$\Leftrightarrow e^x \ln 2 \leq \int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt \leq e^{2x}\ln 2$$

إذن $\forall x \geq 0 \quad e^x \ln 2 \leq F(x) \leq e^{2x} \ln 2$

-2 نستنتج أن F متصلة في 0 على اليمين.

لدينا $\forall x \geq 0 \quad e^x \ln 2 \leq F(x) \leq e^{2x} \ln 2$ و $\lim_{x\to 0^+} e^x \ln 2 = \lim_{x\to 0^+} e^{2x}\ln 2 = \ln 2 = F(0)$

إذن F متصلة في 0 على اليمين.

-3 أحسب $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$ و أول النتيجة هندسيا.

لدينا $\forall x \geq 0 \quad e^x \ln 2 \leq F(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} e^x \ln 2 = +\infty$ ومنه $\lim_{x\to+\infty} F(x)=+\infty$

$\forall x \succ 0 \quad \frac{e^x}{x}\ln 2 \leq \frac{F(x)}{x}$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\ln 2=+\infty$ ومنه $\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=+\infty$

إذن C_F يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب

-4 نبين أن F قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و أن $\forall x \in]0;+\infty[\quad F'(x)=\frac{e^{2x}-e^x}{x}$

$t \to \frac{e^t}{t}$ متصلة على $]0;+\infty[$ و $\forall x \succ 0 \quad F(x)=\int_0^{2x}\frac{e^t}{t}dt-\int_0^x\frac{e^t}{t}dt$

ومنه F قابلة للاشتقاق في $]0;+\infty[$ و $\forall x \succ 0 \quad F'(x)=2\frac{e^{2x}}{2x}-\frac{e^x}{x}=\frac{e^{2x}-e^x}{x}$

-5 نعتبر الدالة f المعرف على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{e^x-1}{x} \quad \forall x \succ 0$ و $f(0)=1$

أ) نبين أن f متصلة في 0 على اليمين.

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}=1=f(0)$ إذن f متصلة في 0 على اليمين.

ب) ندرس قابلية اشتقاق f على يمين 0 و نؤول ذلك هندسيا

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^x-x-1}{x^2}=\frac{1}{2}$$ (نقبل أن $\lim_{x\to0}\frac{e^x-x-1}{x^2}=\frac{1}{2}$)

C_f يقبل نصف مماس على يمين 0 معامله الموجه $\frac{1}{2}$

ج) نبين أن f تزايدية قطعا على $[0;+\infty[$

$$\forall x\succ0 \quad f'(x)=\frac{e^x x-e^x+1}{x^2}$$

نضع $h(x)=xe^x-e^x+1$ ومنه $h'(x)=xe^x\succ0 \quad \forall x\succ0$ و بالتالي h تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$

وحيث $\lim_{x\to0}h(x)=\lim_{x\to0}xe^x-e^x+1=0$ فان $h(x)\succ0 \quad \forall x\succ0$

و بالتالي $f'(x)\succ0 \quad \forall x\succ0$ إذن f تزايدية قطعا على $[0;+\infty[$

6- ليكن $x\succ0$ نبين أنه يوجد c من $]0;x[$ حيث $f(c).e^c=\frac{F(x)-\ln2}{x}$

ليكن $x\succ0$

لدينا F متصلة $[0;x]$ و F قابلة للاشتقاق على $]0;x[$

ومنه حسب مبرهنة التزايدات المنتهية

يوجد c من $]0;x[$ حيث $F(x)-F(0)=xF'(c)=x\frac{e^{2c}-e^c}{c}=xe^cf(c)$

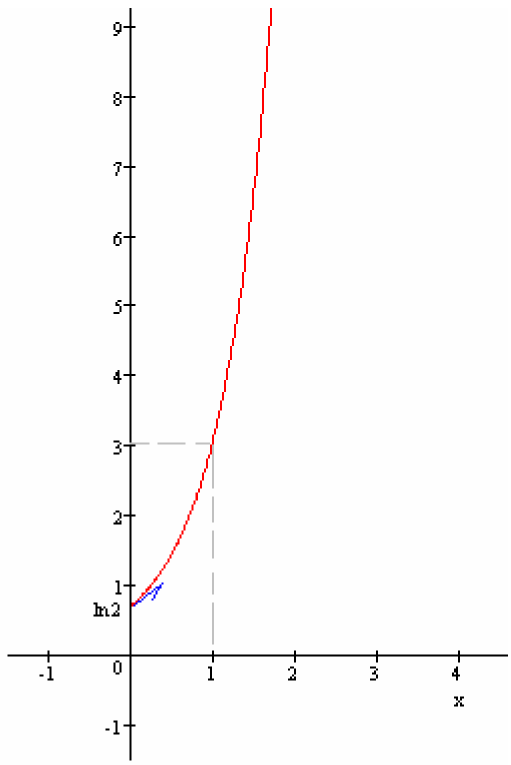
أي $F(x)-\ln2=xe^cf(c)$ إذن $f(c).e^c=\frac{F(x)-\ln2}{x}$

7- نستنتج قابلية اشتقاق F في 0 على اليمين و نؤول ذلك هندسيا.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{F(x)-\ln2}{x}=\lim_{c\to0^+}f(c).e^c=\lim_{c\to0^+}e^c\frac{e^c-1}{c}=1$$

F قابلة للاشتقاق على يمين 0 و تقبل نصف مماس معامله الموجه 1 عند النقطة ذات الافصول0

8- ننشئ المنحنى (C_F) في معلم متعامد ممنظم. نأخذ $F(1)\simeq3$; $\ln2\simeq0,7$



تمرين2

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\ge1}$ المعرفة بـ $u_n = \sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n!\cdot n^n}} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

-1 نبين أن $\ln(u_n) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\dfrac{i}{n}\right) \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad \ln u_n = \ln\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!\cdot n^n}} = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{(n+1)(n+2).......(n+n)}{\underbrace{n.n.n.n.n........n}_{n\ facteurs\ \text{egaux à n}}}\right) = \frac{1}{n}\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right).....\cdot\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)$$

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad \ln(u_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)$$

-2 نبين أن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4e^{-1}$

لدينا $\ln(u_n) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\dfrac{i}{n}\right) \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

و الدالة $x\to\ln(1+x)$ متصلة على $[0;1]$ و تزايدية قطعا على $[0;1]$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln u_n = \int_0^1 \ln(1+x)\,dx = \left[(x+1)\ln(x+1)-x\right]_0^1 = 2\ln 2 - 1 = \ln 4e^{-1}$

إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4e^{-1}$

تمرين3

نعتبر $(E)=\{M\in M_3(\mathbb{R}) / AM = MA\}$ حيث $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

-1 نبين أن $(E;+;.)$ فضاء متجهي حقيقي

نضع $O=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \quad : \quad O\in(E)$

ليكن $(M;M')\in(E)^2$

لدينا $A(M-M') = AM - AM' = MA - MA = (M-M')A$

ومنه $(M-M')\in(E)$

$(E;+)$ زمرة جزئية لـ $(M_3(\mathbb{R});+)$

ليكن $(M;\alpha)\in(E)\times\mathbb{R}$

$A\times(\alpha\cdot M) = \alpha\cdot(A\times M) = \alpha\cdot(M\times A) = (\alpha\cdot M)\times A$

ومنه $\alpha\cdot M\in(E)$

إذن $\cdot$ قانون تركيب خارجي في (E)

لدينا الخاصيات $1\cdot M = M$ و $(\alpha+\beta)\cdot M = \alpha M + \beta M$ و $\alpha(M+M') = \alpha M + \alpha M'$

$(\alpha\beta)\cdot M' = \alpha\cdot(\beta\cdot M)$ محققة في (E) لأن $(E)\subset M_3(\mathbb{R})$ و $(M_3(\mathbb{R});+;\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

إذن $(E\,;+\,;.)$ فضاء متجهي حقيقي

-2 نحسب A^2 ; A^3 ; A^n لكل $n\geq 3$

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

ومنه $\forall n\geq 3 \quad A^n=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

-3 بين أن $(I;A;A^2)$ أساس للفضاء $(E\,;+\,;.)$ واستنتج بعده

ليكن $M=\begin{pmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{pmatrix}\in(E)$

ومنه
$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

أي أن $\begin{pmatrix}x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&x_1&y_1\\0&x_2&y_2\\0&x_3&y_3\end{pmatrix}$

وبالتالي $z_2=y_1 \quad et \quad x_1=y_2=z_3 \quad et \quad x_2=x_3=y_3=0$

اذن $M=\begin{pmatrix}x_1&y_1&z_1\\0&x_1&y_1\\0&0&x_1\end{pmatrix}=x_1I+y_1A+z_1A^2$

ومنه $(I;A;A^2)$ مولدة لـ (E)

$$x_1I+y_1A+z_1A^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_1&y_1&z_1\\0&x_1&y_1\\0&0&x_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow x_1=y_1=z_1=0$$

$(I;A;A^2)$ أسرة حرة

ومنه $(I;A;A^2)$ أساس للفضاء $(E\,;+\,;.)$ و $\dim(E)=3$

-4 نبين أن $(E\,;+\,;\times)$ حلقة تبادلية واحدية

$(E\,;+)$ زمرة تبادلية(بديهي)

$\times$ تجميعي في (E) (بديهي)

$I\in(E)$

ليكن $M=x_1I+y_1A+z_1A^2$ و $M'=x_1'I+y_1'A+z_1'A^2$

$M \times M' = \left(x_1 I + y_1 A + z_1 A^2\right) \times \left(x_1' I + y_1' A + z_1' A^2\right)$

$M \times M' = x_1 x_1' I + \left(x_1 y_1' + y_1 x_1'\right) A + \left(y_1 y_1' + x_1 z_1' + z_1 x_1'\right) A^2$

$M \times M' = x_1' x_1 I + \left(x_1' y_1 + y_1' x_1\right) A + \left(y_1' y_1 + x_1' z_1 + z_1' x_1\right) A^2 = M' \times M$

× تبادلي في (E)

× توزيعي على + في (E) بديهي

إذن $\left(E\,;+\,;\times\right)$ حلقة تبادلية واحدية

5- هل $\left(E\,;+\,;\times\right)$ جسم؟

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in (E)$ لدينا $\det A = 0$ ومنه A لاتقبل مقلوبا

إذن $\left(E\,;+\,;\times\right)$ ليس جسما.