تصحيح فرض شهر يناير2005 (1س.ب.ع.ت)
موقع الرياضيات بالثانوي

تمرين1

بين أن $\sin(x+y)\cdot\sin(x-y)=\sin^2 x-\sin^2 y$

$$\begin{aligned}\sin(x+y)\cdot\sin(x-y)&=(\sin x\cos y+\sin y\cos x)(\sin x\cos y-\sin y\cos x)\\&=\sin^2 x\cos^2 y-\sin^2 y\cos^2 x\\&=\sin^2 x\left(1-\sin^2 y\right)-\sin^2 y\left(1-\sin^2 x\right)\\&=\sin^2 x-\sin^2 x\cdot\sin^2 y-\sin^2 y+\sin^2 y\cdot\sin^2 x\\&=\sin^2 x-\sin^2 y\end{aligned}$$

تمرى2

$p(x)=\sin x+\sin 2x+\sin 3x$ و $Q(x)=1+\cos x+\cos 2x$

-1 نبين أن $p(x)=\sin 2x(1+2\cos x)$

$$p(x)=\sin x+\sin 2x+\sin 3x$$
$$p(x)=\sin 2x+2\left(\sin\frac{x+3x}{2}\right)\cdot\left(\cos\frac{3x-x}{2}\right)$$
$$p(x)=\sin 2x+2\sin 2x\cdot\cos x$$
$$p(x)=\sin 2x(1+2\cos x)$$

نبين أن $Q(x)=\cos x(1+2\cos x)$

$$Q(x)=1+\cos x+\cos 2x$$
$$Q(x)=1+\cos x+2\cos^2 x-1$$
$$Q(x)=\cos x(1+2\cos x)$$

-2 نحل في $\mathbb{R}$ المعادلة $p(x)=Q(x)$

$$p(x)=Q(x)\Leftrightarrow\sin 2x(1+2\cos x)=\cos x(1+2\cos x)$$
$$p(x)=Q(x)\Leftrightarrow(1+2\cos x)(\sin 2x-\cos x)=0$$
$$p(x)=Q(x)\Leftrightarrow(1+2\cos x)(2\sin x\cdot\cos x-\cos x)=0$$
$$p(x)=Q(x)\Leftrightarrow\cos x(1+2\cos x)(2\sin x-1)=0$$
$$p(x)=Q(x)\Leftrightarrow\cos x=0\quad ou\quad 1+2\cos x=0\quad ou\quad 2\sin x-1=0$$
$$p(x)=Q(x)\Leftrightarrow\cos x=0\quad ou\quad \cos x=-\frac{1}{2}\quad ou\quad \sin x=\frac{1}{2}$$
$$p(x)=Q(x)\Leftrightarrow\begin{cases}\left[x=\frac{\pi}{2}+k\pi\right]\quad ou\quad\left[x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\quad ou\quad x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right]\\ \quad ou\quad\left[x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\quad ou\quad x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right]/k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

إذن $S=\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{5\pi}{6}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

-3 نحل المتراجحة $P(x)-Q(x)\geq 0$ $x\in[0;2\pi]$

$$p(x)-Q(x)\geq\Leftrightarrow(1+2\cos x)(\sin 2x-\cos x)\geq 0$$
$$p(x)-Q(x)\geq\Leftrightarrow(1+2\cos x)(2\sin x\cdot\cos x-\cos x)\geq 0$$
$$p(x)-Q(x)\geq\Leftrightarrow\cos x(1+2\cos x)(2\sin x-1)\geq 0$$

من حلول المعادلة السابقة نستنتج أن:

$$x\in[0;2\pi[\quad 1+2\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{2\pi}{3}\quad ou\quad x=\frac{4\pi}{3}$$
$$x\in[0;2\pi[\quad \cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}\quad ou\quad x=\frac{3\pi}{2}$$
$$x\in[0;2\pi[\quad 2\sin x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}\quad ou\quad x=\frac{5\pi}{6}$$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$1+2\cos x$		+		+		+	0	-		-	0	+		+	
$2\sin x-1$		+	0	-		-		-	0	+		+		+	
$\cos x$		+		+	0	-		-		-		-	0	+	
$P(x)-Q(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	

$$S=\left[0;\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6};\frac{4\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right[$$

تمرين3

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{i};\vec{j})$ نعتبر النقط $A(-1;2)$ و $B(0;-1)$

و $C(-2;0)$ و (C) مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تحقق المعادلة: $x^2+y^2-2x-2y-3=0$

-1 نبين أن (C) دائرة شعاعها $r=\sqrt{5}$ مع تحديد مركزها

$$M(x;y)\in(C)\Leftrightarrow x^2+y^2-2x-2y-3=0$$
$$\Leftrightarrow(x-1)^2+(y-1)^2-1-1-3=0$$
$$\Leftrightarrow(x-1)^2+(y-1)^2=5$$

إذن (C) دائرة شعاعها $\sqrt{5}$ و مركزها $\Omega(1;1)$

-2 نحدد موضع النقط A و B و C بالنسبة للدائرة (C)

من أجل $A(-1;2)$ لدينا $(-1)^2+2^2-2\times-1-2\times 2-3=7-7=0$ إذن $A(-1;2)\in(C)$

من أجل $B(0;-1)$ لدينا $(-1)^2-2\times-1-3=3-3=0$ إذن $B(0;-1)\in(C)$

من أجل $C(-2;0)$ لدينا $(-2)^2-2\times-2-3=8-3=5\succ 0$ إذن $C(-2;0)$ خارج الدائرة

-1 نحدد معادلة (D) المماس للدائرة (C) في النقطة A.

لدينا $\overrightarrow{\Omega A}(-2;1)$ و $A(-1;2)$

$$M(x;y)\in(D)\Leftrightarrow\overrightarrow{\Omega A}\cdot\overrightarrow{AM}=0$$
$$M(x;y)\in(D)\Leftrightarrow -2(x+1)+y-2=0$$
$$\Leftrightarrow -2x+y-4=0$$

إذن $(D):\quad -2x+y-4=0$

4- أ- نبين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $x+2y+2=0$ مماس للدائرة (C)، المار من C

من أجل $C(-2;0)$ لدينا $-2+2\times 0+2=0$ ومنه $C\in(\Delta)$

لدينا $d(\Omega;(\Delta))=\dfrac{|1+2+2|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

إذن المستقيم (Δ) مماس للدائرة (C)، و مار من C

ب- نحدد معادلة المماس الآخر للدائرة (C) المار من C

ليكن (D') المماس الأخر و $C(-2;0)$ و $\Omega(1;1)$

$$M(x;y)\in(D')\cap(C)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2-2x-2y-3=0\\ \overrightarrow{\Omega M}\cdot\overrightarrow{CM}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2-2x-2y-3=0\\ (x-1)(x+2)+(y-1)y=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2-2x-2y-3=0\\ x^2+y^2+x-y-2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2-2x-2y-3=0\\ 3x+y+1=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2-2x-2y-3=0\\ y=-3x-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}10x^2+10=0\\ y=-3x-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\quad ou\quad x=-1\\ y=-3x-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=-1\end{cases} ou \begin{cases}x=-1\\ y=2\end{cases}$$

تقاطع (D') و (C) سيكون $B(0;-1)$ أو $A(-1;2)$

نلاحظ أن $B(0;-1)\in(\Delta)$ ومنه $(D')\cap(C)=\{A(-1;2)\}$

اذن (D') هو المماس لـ (C) في $A(-1;2)$

ومنه $(D')=(D)$ اذن $(D'):\quad -2x+y-4=0$

5- أ- نحسب $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ و نستنتج أن CAB مثلث قائم الزاوية في C

لدينا $\overrightarrow{CA}(1;2)$ و $\overrightarrow{CB}(2;-1)$

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=2-2=0$ ومنه CAB مثلث قائم الزاوية في C

ب- نحدد معادلة ديكارتية للدائرة (C') المحيطة بالمثلث CAB

بما أن CAB مثلث قائم الزاوية في C فان $[AB]$ قطر للدائرة (C')

$$M(x;y)\in(C')\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$$

$$\Leftrightarrow(x+1)x+(y-2)(y+1)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+x-y-2=0$$

إذن $(C'):\quad x^2+y^2+x-y-2=0$

-6 نحل مبيانيا النظمة $\begin{cases} x^2+y^2-2x-2y-3\le 0 \\ x^2+y^2+x-y-2\le 0 \end{cases}$ $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

لدينا $(C'):\quad x^2+y^2+x-y-2=0$ الدائرة التي قطرها $[AB]$ و $(C):\quad x^2+y^2-2x-2y-3=0$

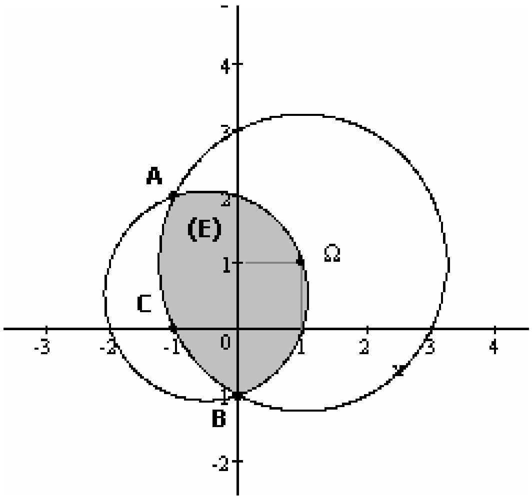
الدائرة التي مركزها $\Omega(1;1)$ وتمر من $A(-1;2)$

ليكن $I_{(C)}$ و $I_{(C')}$ داخل الدائرتين (C) و (C') على التوالي

$$M(x;y)\in I_{(C)}\cup(C) \Leftrightarrow x^2+y^2-2x-2y-3\le 0$$

$$M(x;y)\in I_{(C')}\cup(C') \Leftrightarrow x^2+y^2+x-y-2\le 0$$

نضع $(E)=\left[I_{(C)}\cup(C)\right]\cap\left[I_{(C')}\cup(C')\right]$.



(E) هو الجزء الملون في المستوى

إذن مجموعة الحلول هي

$$S=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / M(x;y)\in(E)\right\}$$

-7 نحدد تقاطع الدائرة (C) و المستقيم ذا المعادلة $x-3y-3=0$

نحل $(S):\begin{cases} x^2+y^2-2x-2y-3=0 \\ x-3y-3=0 \end{cases}$

$$(S)\Leftrightarrow\begin{cases} x^2+y^2-2x-2y-3=0 \\ x=3y+3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} (3y+3)^2+y^2-2(3y+3)-2y-3=0 \\ x=3y+3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 10y^2+10y=0 \\ x=3y+3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} y=0 \quad ou \quad y=-1 \\ x=3y+3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} y=0 \\ x=3 \end{cases} ou \begin{cases} y=-1 \\ x=0 \end{cases}$$

إذن الدائرة (C) و المستقيم ذا المعادلة $x-3y-3=0$

يتقاطعان في النقطة $E(0;-1)$ و $F(3;0)$