تصحيح فرض أكتوبر 2004
1 سلك بكالوريا علوم تجريبية
موقع الرياضيات بالثانوي

تمرين1 :

$f(x) = -x^2 + 2x - 2$; $g(x) = \dfrac{-2x-6}{2x+1}$; $h(x) = \sqrt{x-2}$

-1 نحدد D_g و D_h

لتكن $x \in \mathbb{R}$

* $g(x) \in \mathbb{R}$ تكافئ $2x+1 \neq 0$

تكافئ $x \neq -\dfrac{1}{2}$ إذن $D_g = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

* $h(x) \in \mathbb{R}$ تكافئ $x-2 \geq 0$

تكافئ $x \geq 2$ إذن $D_h = [2;+\infty[$

-2 نعطي جدول تغيرات كل دالة من الدوال f و g و h

لدينا $f(x) = -x^2 + 2x - 2$

f دالة حدودية من الدرجة الثانية

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f		$\nearrow$	-1	$\searrow$	

لدينا $g(x) = \dfrac{-2x-6}{2x+1}$

g دالة متخاطة و $\begin{vmatrix} -2 & -6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 10$ $\left(\begin{vmatrix} -2 & -6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \succ 0\right)$

x	$-\infty$		$\dfrac{-1}{2}$		$+\infty$
g		$\nearrow$	$\|\|$	$\nearrow$	

لدينا $h(x) = \sqrt{x-2}$

x	2		$+\infty$
h	0	$\nearrow$	

-3 أ)- بين أن $\forall x \in D_g \quad f(x) = g(x) \Leftrightarrow (x-2)\left(-2x^2 - x - 2\right) = 0$

لتكن $x \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{-1}{2}\right\}$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x^2 + 2x - 2 = \frac{-2x-6}{2x+1}$$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{\left(-x^2+2x-2\right)(2x+1) + 2x + 6}{2x+1} = 0$$

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow \frac{-2x^3-x^2+4x^2+2x-4x-2+2x+6}{2x+1}=0$$

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow \frac{-2x^3+3x^2+4}{2x+1}=0$$

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow -2x^3+3x^2+4=0$$

وحيث أن $(x-2)(-2x^2-x-2)=-2x^3-x^2-2x+4x^2+2x+4$

$$=-2x^3+3x^2+4$$

فان $f(x)=g(x) \Leftrightarrow (x-2)(-2x^2-x-2)=0$

ب)- نحدد جبريا تقاطع المنحنيين (C_f) و (C_g)

لنحل المعادلة $f(x)=g(x)$

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow (x-2)(-2x^2-x-2)=0$$

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x-2=0 \quad ou \quad -2x^2-x-2=0$$

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x=2 \quad ou \quad -2x^2-x-2=0$$

ليكن Δ مميز المعادلة $-2x^2-x-2=0$

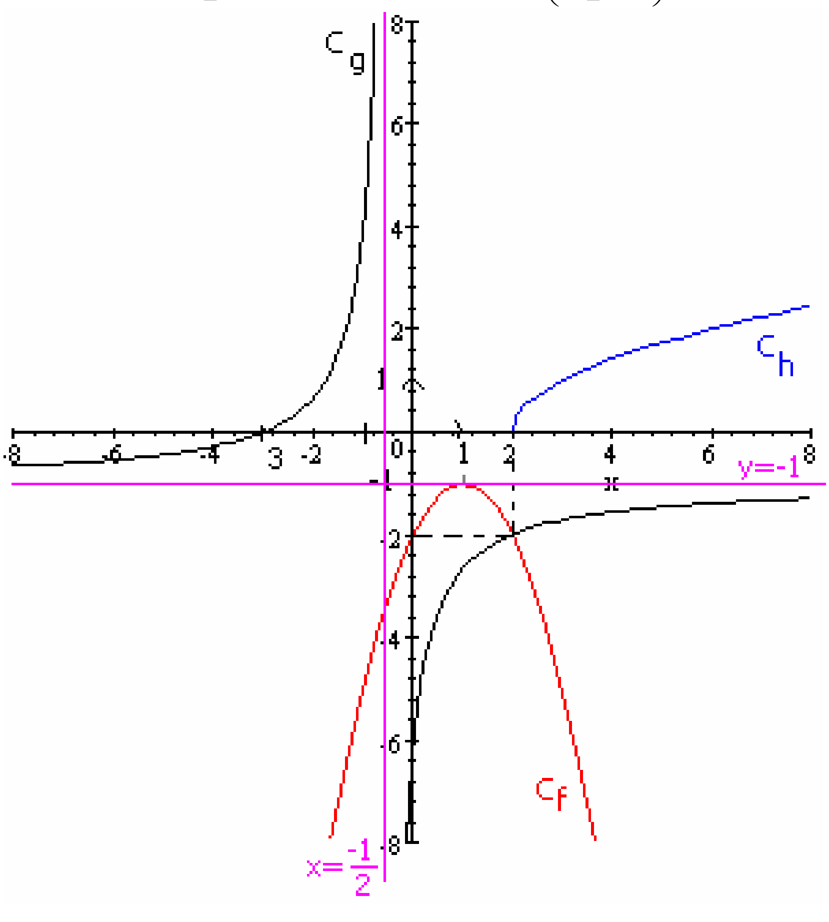
$\Delta=(-1)^2-4\times-2\times-2=-15$ ومنه المعادلة $-2x^2-x-2=0$ لا تقبل حلا في $\mathbb{R}$

إذن (C_f) و (C_g) يتقاطعان في النقطة ذات الأفصول 2

4- أ)- ننشئ المنحيات (C_f) **و** (C_g) **و** (C_h)

(C_f) شلجم رأسه $\Omega(1;-1)$ ومحور تماثله المستقيم ذا المعادلة $x=1$

(C_g) هذلول مركزه $\Omega'\left(-\frac{1}{2};-1\right)$ ومقارباه المستقمان $(\Delta): x=-\frac{1}{2}$; $(\Delta'): y=-1$



ب)- نحل مبيانيا $f(x)\geq g(x)$

$f(x)\geq g(x)$ تعني (C_f) فوق (C_g)

من خلال التمثيل المبياني لدينا (C_f) فوق (C_g) اذا كان $x\in\left]-\frac{1}{2};2\right]$

إذن $S=\left]-\frac{1}{2};2\right]$

ج)-* نحدد مبيانيا $f([-1;3])$

من خلال التمثيل المبياني يتضح أن $f([-1;3])=[-5;-1]$

* نبين جبريا أن $h([2;3])=[0;1]$

ليكن $x\in[2;3]$ ومنه $2\leq x\leq 3$ و حيث أن h تزايدية فان $h(2)\leq h(x)\leq h(3)$

أي أن $0\leq h(x)\leq 1$ و منه $h([2;3])\subset[0;1]$ (1)

ليكن $y\in[0;1]$

$$h(x)=y\Leftrightarrow\sqrt{x-2}=y$$
$$\Leftrightarrow x=y^2+2$$

لدينا $0\leq y\leq 1$ ومنه $2\leq y^2+2\leq 3$

ومنه لكل $y\in[0;1]$ يوجد $x\in[1;2]$ حيث $h(x)=y$

إذن $[0;1]\subset h([2;3])$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن $h([2;3])=[0;1]$

5- أ)- نحدد $f\circ h(x)$ لكل x من $[2;+\infty[$

ليكن x من $[2;+\infty[$

$$f\circ h(x)=f(h(x))=f\left(\sqrt{x-2}\right)=-(x-2)+2\sqrt{x-2}-2$$
$$=-x+2\sqrt{x-2}$$

ب)- نحدد رتابة الدالة t على كل من $[2;3]$ و $]3;+\infty[$ باستعمال مركبة دالتين

لدينا $t(x)=-x+2\sqrt{x-2}$ ومنه $t(x)=f\circ h(x)$

* لدينا $h([2;3])=[0;1]$ و h تزايدية على $[2;3]$ و f تزايدية على $[0;1]$

ومنه t تزايدية على $[2;3]$

* لدينا $h(]3;+\infty[)=]1;+\infty[$ و h تزايدية على $]3;+\infty[$ و f تناقصية على $]1;+\infty[$

ومنه t تناقصيةعلى $]3;+\infty[$

تمرين2 : f دالة عددية معرفة لمتغير حقيقي معرفة بـ: $f(x)=\dfrac{-2x^2-3}{x^2+2}$

1- نبين أن $\frac{-3}{2}$ هي القيمة القصوى المطلقة للدالة f

$$f(x)-\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{-2x^2-3}{x^2+2}+\frac{3}{2}=\frac{-4x^2-6+3x^2+6}{2(x^2+2)}=\frac{-x^2}{2(x^2+2)}$$

ومنه $f(x)\leq\frac{-3}{2}\quad\forall x\in\mathbb{R}$

و حيث أن $f(0)=\frac{-3}{2}$ فإن $\frac{-3}{2}$ هي القيمة القصوى المطلقة للدالة f

-2 نبين أن f مصغورة بالعدد -2

$$f(x)-(-2)=\frac{-2x^2-3}{x^2+2}+2=\frac{-2x^2-3+2x^2+4}{x^2+2}=\frac{x^2+1}{x^2+2}$$

$\frac{x^2+1}{x^2+2}\succ 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ ومنه $f(x)\succ -2$ $\forall x\in\mathbb{R}$

اذن f مصغورة بالعدد -2

-3 نحدد الدالة h حيث $f=h\circ g$ حيث $g(x)=x-1$

$$f(x)=h\circ g(x)\Leftrightarrow f(x)=h\big(g(x)\big)$$

$$\Leftrightarrow -x^2+2x-2=h\big(g(x)\big)$$

نضع $g(x)=y$ ومنه $y=x-1$

و بالتالي $y+1=x$

ومنه $h(y)=-(y+1)^2+2(y+1)-2$

$$h(y)=-y^2-1$$

إذن h دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=-x^2-1$

تمرين3:

ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ نضع $S_n=1\times 2+2\times 3+3\times 4+............+n(n+1)$

نبين بالترجع أن $S_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

- من أجل $n=1$ لدينا $S_1=1\times 2=2$ و $\frac{1\times(1+1)(1+2)}{3}=2$

ومنه $S_1=\frac{1\times(1+1)(1+2)}{3}$

- نفترض أن $S_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ عبارة صحيحة حتى الرتبة n

نبين أن $S_{n+1}=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$

لدينا

$$S_{n+1}=1\times 2+2\times 3+3\times 4+............+n(n+1)+(n+1)(n+2)$$

$$S_{n+1}=S_n+(n+1)(n+2)$$

$$S_{n+1}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}+(n+1)(n+2)$$

$$S_{n+1}=(n+1)(n+2)\left(\frac{n}{3}+1\right)$$

$$S_{n+1}=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

إذن $S_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

تمرين4

ننفي العبارتين :

* نفي العبارة $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \left[x \prec n \quad \text{أو} \quad x \geq n+1 \right]$

هي العبارة $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{Z} \quad \left[\left(x \geq n \right) \quad \wedge \quad \left(x \prec n+1 \right) \right]$

* العبارة $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 \quad -1 \leq x+y \leq 2 \Rightarrow |x+y| \leq 2$ هي العبارة

$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 \quad \overline{\left[-1 \leq x+y \leq 2 \right]} \quad \vee \quad \left(|x+y| \leq 2 \right)$

ومنه نفي العبارة $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 \quad -1 \leq x+y \leq 2 \Rightarrow |x+y| \leq 2$

هي العبارة $\exists (x;y) \in \mathbb{R}^2 \quad \left(-1 \leq x+y \leq 2 \right) \quad \wedge \quad \left(|x+y| \succ 2 \right)$