تصحيح فرض شهر أبريل 2004

تمرين1

$$f(x)=\frac{\sqrt{5-\cos x}-2}{x^2}$$

1- نبين أن f تقبل تمديدا بالاتصال في 0 مع تحديده.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5-\cos x}-2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{5-\cos x-4}{x^2\left(\sqrt{5-\cos x}+2\right)}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\times\frac{1}{\sqrt{5-\cos x}+2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

اذن f تقبل تمديدا بالاتصال في 0 هو الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بمايلي

$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{\sqrt{5-\cos x}-2}{x^2} & x\neq 0 \\ g(0)=\dfrac{1}{8} & \end{cases}$$

2- نبين أن $|f(x)|\le\frac{1}{x^2}$ $\quad\forall x\in\mathbb{R}^*$ و نستنتج $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

ليكن $x\in\mathbb{R}^*$

$$-1\le\cos x\le 1\Leftrightarrow 4\le 5-\cos x\le 6$$
$$\Leftrightarrow 2\le\sqrt{5-\cos x}\le\sqrt{6}$$
$$\Leftrightarrow 0\le\sqrt{5-\cos x}-2\le\sqrt{6}-2\prec 1$$
$$\Leftrightarrow 0\le\frac{\sqrt{5-\cos x}-2}{x^2}\prec\frac{1}{x^2}$$

إذن $|f(x)|\le\frac{1}{x^2}$ $\quad\forall x\in\mathbb{R}^*$ **وحيث أن** $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ **فان** $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

تمرين2

$$f(x)=1+\frac{1-2x}{x^2-x-2}$$

1- نحدد D_f و نحدد نهايات f عند محدات D_f

ليكن $x\in\mathbb{R}$

$$x\in D_f\Leftrightarrow x^2-x-2\neq 0\Leftrightarrow x\neq -1 \quad et \quad x\neq 2$$

إذن $D_f=\left]-\infty;-1\right[\cup\left]-1;1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

$$\lim_{x\mapsto\pm\infty} f(x)=\lim_{x\mapsto\pm\infty}1+\frac{1-2x}{x^2-x-2}=1$$ **لأن** $$\lim_{x\mapsto\pm\infty}\frac{1-2x}{x^2-x-2}=\lim_{x\mapsto\pm\infty}\frac{-2x}{x^2}=\lim_{x\mapsto\pm\infty}\frac{-2}{x}=0$$

لدينا $\lim_{x\mapsto 2}x^2-x-2=0$ $\qquad$ $\lim_{x\mapsto 2}1-2x=-3$

x	$-\infty$		**-1**		**2**		$+\infty$
$f(x)$		+	**0**	**-**	**0**	+	

ومنه $\lim\limits_{x\mapsto 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto 2^+} 1+\dfrac{1-2x}{x^2-x-2} = -\infty$ و $\lim\limits_{x\mapsto 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto 2^-} 1+\dfrac{1-2x}{x^2-x-2} = +\infty$

لدينا $\lim\limits_{x\mapsto -1} x^2-x-2=0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\mapsto -1} 1-2x=3$

ومنه $\lim\limits_{x\mapsto -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto -1^+} 1+\dfrac{1-2x}{x^2-x-2} = -\infty$ و $\lim\limits_{x\mapsto -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto -1^-} 1+\dfrac{1-2x}{x^2-x-2} = +\infty$

-2 نحدد $f'(x)$ **لكل** x **من** D_f

$$f'(x)=\frac{(1-2x)'\left(x^2-x-2\right)-\left(x^2-x-2\right)'(1-2x)}{\left(x^2-x-2\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-2\left(x^2-x-2\right)-(2x-1)(1-2x)}{\left(x^2-x-2\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-2x^2+2x+4+4x^2-4x+1}{\left(x^2-x-2\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^2-2x+5}{\left(x^2-x-2\right)^2}$$

-3 ندرس تغيرات f

$$\forall x\in D_f \qquad f'(x)=\frac{2x^2-2x+5}{\left(x^2-x-2\right)^2}$$

إشارة $f'(x)$ **هي إشارة** $2x^2-2x+5$

$$\Delta = 4-40=-36$$

اذن $2x^2-2x+5\succ 0 \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

جدول التغيرات f

x	$-\infty$		**-1**		**2**		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	‖	$+$	
f	**1**	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	**1**

-4 أ- نبين أن C_f **يقبل** $I\left(\dfrac{1}{2};1\right)$ **كنقطة انعطاف.**

$$\forall x\in D_f \qquad f''(x)=\frac{-2(2x-1)\left(x^2-x+7\right)}{\left(x^2-x-2\right)^3}$$

$f''(x)$ **تنعدم في** $\dfrac{1}{2}$ **مع تغيير الإشارة إذن** C_f **يقبل** $I\left(\dfrac{1}{2};1\right)$ **كنقطة انعطاف**

ب- نبين أن $I\left(\dfrac{1}{2};1\right)$ **مركز تماثل لـ** C_f

$$\forall x \in D_f \qquad 1-x \in D_f$$

$$f(1-x)=1+\frac{1-2(1-x)}{(1-x)^2-(1-x)-2}=1-\frac{1-2x}{x^2-x-2}$$

$$2-f(x)=2-1-\frac{1-2x}{x^2-x-2}=1-\frac{1-2x}{x^2-x-2}$$

إذن $f(1-x)=2-f(x)$ ومنه $I\left(\frac{1}{2};1\right)$ مركز تماثل لـ C_f

د- نحدد معادلة المماس لـ C_f عند النقطة I

معادلة المماس لـ C_f عند النقطة I هي $y=f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+1$

أي $y=\frac{8}{9}\left(x-\frac{1}{2}\right)+1$ **ومنه** $y=\frac{8}{9}x+\frac{5}{9}$

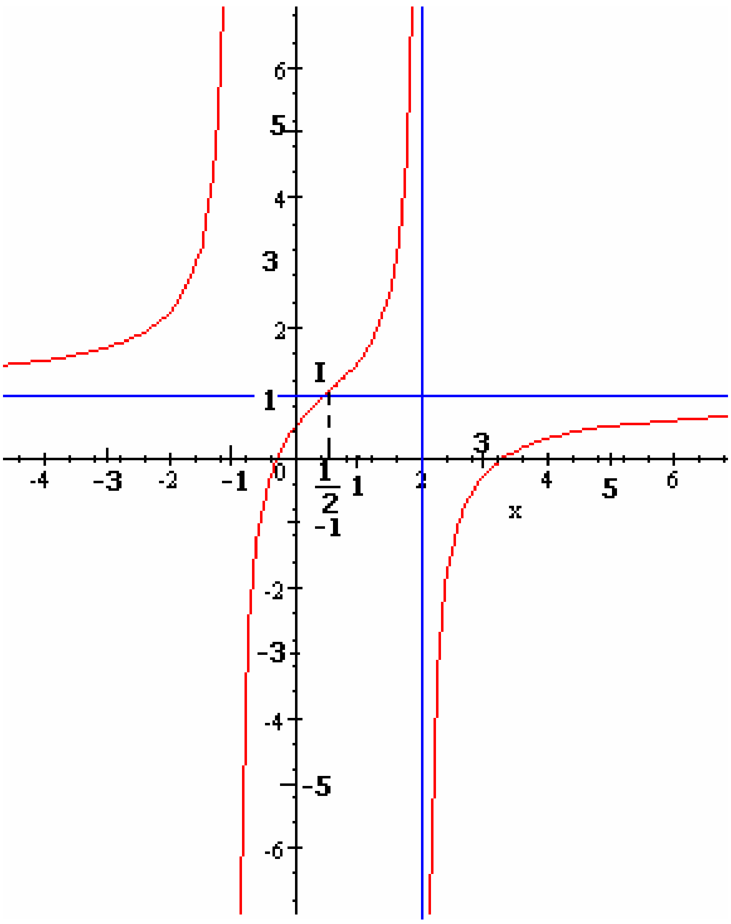
5- أ- ندرس الفروع اللانهائية

لدينا $\lim\limits_{x\mapsto\pm\infty} f(x)=1$ **ومنه المستقيم ذا المعادلة** $y=1$ **مقارب أفقي للمنحنى** C_f

لدينا ومنه $\lim\limits_{x\mapsto 2^+} f(x)=-\infty$ **و** $\lim\limits_{x\mapsto 2^-} f(x)=+\infty$ **ومنه المستقيم ذا المعادلة** $x=2$ **مقارب عمودي للمنحنى** C_f

لدينا $\lim\limits_{x\mapsto -1^+} f(x)=-\infty$ **و** $\lim\limits_{x\mapsto -1^-} f(x)=+\infty$ **ومنه المستقيم ذا المعادلة** $x=-1$ **مقارب عمودي للمنحنى** C_f

ب- ننشئ المنحنى C_f



تمرين3

$$f(x)=\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$$

-1 نحدد D_f و $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

ليكن $x\in\mathbb{R}$

$x\in D_f \Leftrightarrow \cos x\neq 1 \Leftrightarrow x\neq 2k\pi \quad /k\in\mathbb{Z}$

اذن $D_f=\mathbb{R}-\{2k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$

-2 أ- نبين أن f دالة دورية و حدد دورها

$\forall x\in\mathbb{R}-\{2k\pi/k\in\mathbb{Z}\} \quad 2\pi+x\in\mathbb{R}-\{2k\pi/k\in\mathbb{Z}\} \quad x-2\pi\in\mathbb{R}-\{2k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$

$$f(x+2\pi)=\frac{1+\cos(x+2\pi)}{1-\cos(x+2)}=\frac{1+\cos x}{1-\cos x}=f(x)$$

اذن f دالة دورية و حدد دورها 2π

ب- نتأكد أن f زوجية نستنتج D_E مجموعة دراسة f

$\forall x\in\mathbb{R}-\{2k\pi/k\in\mathbb{Z}\} \quad -x\in\mathbb{R}-\{2k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$

$$f(-x)=\frac{1+\cos(-x)}{1-\cos(-x)}=\frac{1+\cos x}{1-\cos x}=f(x)$$

إذن f زوجية

ومنه $D_E=]0;\pi]$

-3 ندرس تغيرات f على D_E

$$\forall x\in]0;\pi] \qquad f'(x)=\frac{(-\sin x)(1-\cos x)-(1+\cos x)\sin x}{(1-\cos x)^2}=\frac{-2\sin x}{(1-\cos x)^2}$$

x	**0** $\qquad\qquad$ π
$f'(x)$	+- $\qquad$ **0**
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$ **0**

-4 أنشئ المنحنى C_f