تمرين1

نحدد النهايات

* $\lim_{x\to 2} 3+x-3x^2 = -7$ $\qquad$ $\lim_{x\to-\infty} -2x^4+3x^3+x-1 = \lim_{x\to-\infty} -2x^4 = -\infty$

* $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^5+3x^3+x}{-5x^5+2x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^5}{-5x^5} = -\frac{2}{5}$$

* $$\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^6+2x^2+1}{x^3+3x-1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^6}{x^3} = \lim_{x\to-\infty} -3x^3 = +\infty$$

* $$\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^4+x^2+1}{-x^8-2x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{7x^4}{-x^8} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-7}{x^4} = 0$$

* $$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-5x+3}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x-3)}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x\to 1}\frac{2x-3}{x+3} = -\frac{1}{4}$$

* نحدد $\lim_{x\to 1^+}\frac{-2x+1}{x^2-3x+2}$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		+	0	-	0	+	

$\lim_{x\to 1^+} x^2-3x+2 = 0^-$ $\qquad$ $\lim_{x\to 1^+} -2x+1 = -1$ ومنه $\lim_{x\to 1^+}\frac{-2x+1}{x^2-3x+2} = +\infty$

* $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{2x-2}{(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{2}{\left(\sqrt{2x-1}+1\right)} = 1$$

* $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\times\frac{\sin 5x}{5x}\times 5 = 5$$

* $$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}+x = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1} = -\frac{1}{2}$$

* $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-2\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(1-2\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1-2\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = 1$$

* لدينا $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan^2 x = +\infty$ ومنه $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\tan^2 x+2} = 0$

تمرين2

$$f(x) = \frac{3x^3-x+2}{x+5} \quad \text{و} \quad g(x) = \frac{\sqrt{2-\cos x}-1}{x^2}$$

-1 ندرس اتصال f و g

* $D_f = \mathbb{R} - \{-5\}$

بما أن f دالة جذرية فان f متصلة في $\mathbb{R} - \{-5\}$

* $D_g = \mathbb{R}^*$

لدينا $2 - \cos x \succ 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^*$ و $x \to 2 - \cos x$ متصلة على $\mathbb{R}$

و منه $x \to \sqrt{2 - \cos x}$ متصلة على $\mathbb{R}^*$ و حيث أن $x^2 \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^*$ و $x \to x^2$ متصلة على $\mathbb{R}$

فان g متصلة على $\mathbb{R}^*$

-2 نبين أن g تقبل تمديدا بالاتصال في 0 و حدده.

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2 - \cos x} - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \times \frac{1}{\sqrt{2 - \cos x} + 1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

و منه g تقبل تمديدا بالاتصال في 0 هو الدالة h المعرفة بـ:

$$\begin{cases} h(x) = \dfrac{\sqrt{2 - \cos x} - 1}{x^2} & , x \neq 0 \\ h(0) = \dfrac{1}{4} & \end{cases}$$

-3 نبين أن $|g(x)| \leq \dfrac{1}{x^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}^*$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad -1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2 - \cos x \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{2 - \cos x} - 1 \leq \sqrt{3} - 1 \prec 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad |g(x)| = \left| \frac{\sqrt{2 - \cos x} - 1}{x^2} \right| = \frac{\sqrt{2 - \cos x} - 1}{x^2}$$

لدينا $0 \leq \sqrt{2 - \cos x} - 1 \prec 1$ $\forall x \in \mathbb{R}^*$ ومنه $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad 0 \leq \dfrac{\sqrt{2 - \cos x} - 1}{x^2} \prec \dfrac{1}{x^2}$

إذن $|g(x)| \leq \dfrac{1}{x^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}^*$

نستنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

لدينا $|g(x)| \leq \dfrac{1}{x^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}^*$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ ومنه $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

تمرين3

-1 ندرس اشتقاق f في 0 حيث
$$\begin{cases} f(x) = \sin x & x \geq 0 \\ f(x) = \dfrac{2 - 2\cos x}{x} & x \prec 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2 - 2\cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0^+} 2 \times \frac{1 - \cos x}{x^2} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$$

إذن f قابلة للاشتقاق في 0 و $f'(0)=1$

-2 $\begin{cases} g(x)=x^2+3x+a & x\geq 0 \\ g(x)=bx+1 & x\prec 0 \end{cases}$

نحدد a و b بحيث g قابلة للاشتقاق في 0

g قابلة للاشتقاق في 0 و منه g متصلة في0 أي $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=g(0)$

ومنه $\lim\limits_{x\to 0^-} bx+1=a$ و بالتالي $a=1$

g قابلة للاشتقاق في 0 ومنه $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}$

و بالتالي $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{bx}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{bx+1-a}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2+3x}{x}$ و منه $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{bx}{x}=b=\lim\limits_{x\to 0^+} x+3$

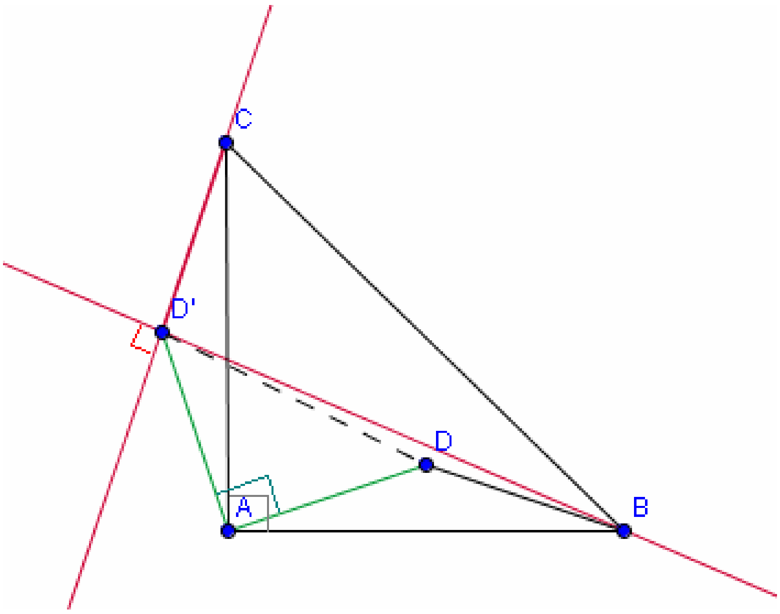
إذن $b=3$

تمرين4

في مستوى موجه نعتبر ABC مثلثا متساوي الساقين في A حيث $[2\pi]$ $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

وD نقطة داخل المثلث ABC . ليكن r الدوران الذي مركزه A و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$

-1 ننشئ D' صورة D بالدوران r



-2 نبين أن $BD=CD'$; $(BD)\perp(CD')$

لدينا $[2\pi]$ $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ و ABC مثلث متساوي الساقين في A و منه $r(B)=C$

و حيث $r(D)=D'$ فان $BD=CD'$ لأن الدوران يحافظ على المسافة

لدينا $r(B)=C$ و $r(D)=D'$ و زاوية الدوران هي $\dfrac{\pi}{2}$ و منه $[2\pi]$ $\left(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{CD'}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

إذن $(BD)\perp(CD')$