تصحيح فرض دجنبر2004
موقع الرياضيات بالثانوي

التمريـــن1

* نحدد $\cos\left(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right)$

لدينا $\left(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{332\pi}{3} - \frac{267\pi}{6} \quad [2\pi]$

ومنه $\left(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{397\pi}{6} \quad [2\pi]$ وبالتالي $\left(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$

إذن $\cos\left(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

* نحدد القياس الرئيسي للزاوية $\left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}}\right)$

$$\left(\overline{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \left(\overline{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OA}}\right) + \left(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right) \quad [2\pi]$$

$$\left(\overline{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{22\pi}{5} + \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$$

$$\left(\overline{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{137\pi}{30} \quad [2\pi]$$

$$\left(\overline{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}}\right) \equiv 4\pi + \frac{17\pi}{30} \quad [2\pi]$$

و $\frac{17\pi}{30} \in]-\pi;\pi]$ فان القياس الرئيسي للزاوية $\left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}}\right)$ هو $\frac{17\pi}{30}$

التمريـــن2

1- نبسط

$$A = \sin(267\pi - x)\cdot\cos\left(\frac{49\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\frac{49\pi}{2} - x\right)\cdot\cos(267\pi - x)$$

$$A = \sin(\pi - x)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cdot\cos(\pi - x)$$

$$A = (\sin x)(\sin x) - (\cos x)(-\cos x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

2- $a)$ نبين أن $P(x) = \frac{3}{4}\left(2\cos^2 2x - 1\right)^2$

$$P(x) = \cos^4 2x + \sin^4 2x - \left(\cos^2 2x\right)\cdot\left(\sin^2 2x\right) - \frac{1}{4}$$

$$P(x) = \cos^4 2x + \left(1 - \cos^2 2x\right)^2 - \left(\cos^2 2x\right)\cdot\left(1 - \cos^2 2x\right) - \frac{1}{4}$$

$$P(x) = \cos^4 2x + 1 - 2\cos^2 2x + \cos^4 2x - \cos^2 2x + \cos^4 2x - \frac{1}{4}$$

$$P(x) = 3\cos^4 2x - 3\cos^2 2x + \frac{3}{4}$$

$$P(x) = \frac{3}{4}(4\cos^4 2x - 4\cos^2 2x + 1)$$

$$P(x) = \frac{3}{4}\left(2\cos^2 2x - 1\right)^2$$

$b)$ - أ- نحل المعادلة $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad x \in \mathbb{R}$

$$\cos 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{4}+2k\pi \quad \vee \quad 2x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+k\pi \quad \vee \quad x=-\frac{\pi}{8}+k\pi / k\in\mathbb{Z}$$

إذن $S=\left\{\frac{\pi}{8}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{8}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

* نحل المعادلة $\cos 2x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad x\in\mathbb{R}$

$$\cos 2x=\frac{-\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow 2x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \quad \vee \quad 2x=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{8}+k\pi \quad \vee \quad x=-\frac{3\pi}{8}+k\pi / k\in\mathbb{Z}$$

إذن $S=\left\{\frac{3\pi}{8}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{3\pi}{8}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

ب- نستنتج في $[0;2\pi[$ حلول المعادلة $P(x)=0$

$$P(x)=0\Leftrightarrow \frac{3}{4}\left(2\cos^2 2x-1\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x-1=0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 2x=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \vee \quad \cos 2x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x=\frac{\pi}{8}+k\pi \quad \vee \quad x=-\frac{\pi}{8}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{3\pi}{8}+k\pi \quad \vee \quad x=-\frac{3\pi}{8}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

* $0\le\frac{\pi}{8}+k\pi\prec 2\pi \Leftrightarrow \frac{-1}{8}\le k\prec\frac{15}{8} \Leftrightarrow k\in\{0;1\}$

إذن $x=\frac{\pi}{8}$ أو $x=\frac{9\pi}{8}$

* $0\le\frac{-\pi}{8}+k\pi\prec 2\pi \Leftrightarrow \frac{1}{8}\le k\prec\frac{17\pi}{8} \Leftrightarrow k\in\{1;2\}$

إذن $x=\frac{7\pi}{8}$ أو $x=\frac{15\pi}{8}$

* $0\le\frac{3\pi}{8}+k\pi\prec 2\pi \Leftrightarrow \frac{-3}{8}\le k\prec\frac{13}{8} \Leftrightarrow k\in\{0;1\}$

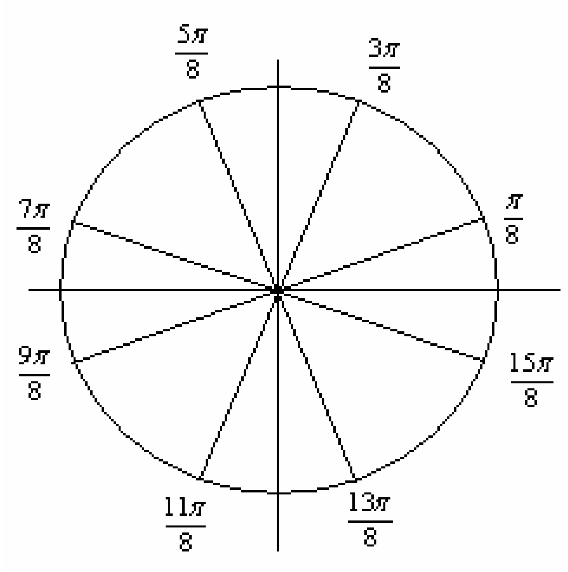
إذن $x=\frac{3\pi}{8}$ أو $x=\frac{11\pi}{8}$

* $0\le\frac{-3\pi}{8}+k\pi\prec 2\pi \Leftrightarrow \frac{3}{8}\le k\prec\frac{19\pi}{8} \Leftrightarrow k\in\{1;2\}$

إذن $x=\frac{5\pi}{8}$ أو $x=\frac{13\pi}{8}$

$$S_{[0;2\pi[}=\left\{\frac{\pi}{8};\frac{3\pi}{8};\frac{5\pi}{8};\frac{7\pi}{8};\frac{9\pi}{8};\frac{11\pi}{8};\frac{13\pi}{8};\frac{15\pi}{8}\right\}$$

تمثيل الحلول



-3 $a)$ نحل في $\mathbb{R}$ المعادلة $2x^2+x-1=0$

ليكن Δ مميز المعادلة : $\Delta=9$

ومنه $x=\frac{-1+3}{4}=\frac{1}{2}$ أو $x=\frac{-1-3}{4}=-1$

إذن $S=\left\{\frac{1}{2};-1\right\}$

$b)$ نحل المعادلة $2\sin^2 x+\sin x-1=0$

لدينا $\sin x$ حل للمعادلة $2x^2+x-1=0$

إذن $\sin x=\frac{1}{2}$ أو $\sin x=-1$

- $\sin x=-1\Leftrightarrow x=\frac{-\pi}{2}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}$

- $\sin x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\\ x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi\end{cases}/k\in\mathbb{Z}$

إذن $S=\left\{\frac{-\pi}{2}+2k\pi;\frac{\pi}{6}+2k\pi;\frac{5\pi}{6}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

التمريـــن3

-1 نحدد معادلة ديكارتية لواسط القطعة $[BC]$

لدينا $\overrightarrow{BC}(2;3)$ منظمية على (D) واسط $[BC]$ ومنه معادلة (D) على شكل $2x+3y+c=0$

و حيث أن $I\left(0;\frac{1}{2}\right)$ منتصف $[BC]$ ينتمي إلى (D) فان $\frac{3}{2}+c=0$ أي أن $c=-\frac{3}{2}$

إذن $(D):2x+3y-\frac{3}{2}=0$

-2 $a)$ نبين أن (Δ) مستقيم معادلته $2x+3y-3=0$

$$M(x;y)\in(\Delta)\Leftrightarrow MB^2-MC^2=3$$

$$\Leftrightarrow(x+1)^2+(y+1)^2-\left[(x-1)^2+(y-2)^2\right]=3$$

$$M(x;y)\in(\Delta) \Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2+2y+1-x^2+2x-1-y^2+4y-4=3$$
$$\Leftrightarrow 4x+6y-6=0$$
$$\Leftrightarrow 2x+3y-3=0$$

إذن $(\Delta): 2x+3y-3=0$

b) نبين أن (Δ) ارتفاع للمثلث ABC المار من A

لدينا $(\Delta): 2x+3y-3=0$ ومنه $\overrightarrow{BC}(2;3)$ منظمية على (Δ)

من أجل $A(0;1)$ لدينا $2\times 0+3\times 1-3=3-3=0$ ومنه $A\in(\Delta)$

إذن (Δ) ارتفاع للمثلث ABC المار من A.

التمرين4

-1 a) نحسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

لدينا $\overrightarrow{AB}\left(\sqrt{3};1\right)$ و $\overrightarrow{AC}\left(-1;-\sqrt{3}\right)$ ومنه $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\sqrt{3}-\sqrt{3}=-2\sqrt{3}$

b) نحسب $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$ و $\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}=\frac{-2\sqrt{3}}{2\times 2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=\frac{\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)}{AB\times AC}=\frac{\begin{vmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & -\sqrt{3}\end{vmatrix}}{2\times 2}$$
$$=\frac{-3+1}{4}=\frac{-1}{2}$$

نستنتج القياس الرئيسي لـ$\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$

لدينا $\begin{cases}\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=\frac{-\sqrt{3}}{2}\\ \sin\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=-\frac{1}{2}\end{cases}$

إذن القياس الرئيسي لـ$\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$ هو $\frac{-5\pi}{6}$

-2 a) نحدد $d\left(A;(D)\right)$

لدينا $(D): 4x-y+1=0$; $A(2;1)$

$$d\left(A;(D)\right)=\frac{|4\times 2-3\times 1+1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{6}{5}$$

b) نحدد زوج إحداثيتي النقطة H

لدينا H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (D) الموجه بالمتجهة $\vec{v}(3;4)$

ومنه:

$$\begin{cases} H(\alpha;\beta)\in(D) \\ \overrightarrow{AH}\perp\vec{v} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha-3\beta+1=0 \\ 3(\alpha-2)+4(\beta-1)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\dfrac{26}{25} \\ \beta=\dfrac{43}{25} \end{cases}$$

-3 $a)$ نبين أن

$$M(x;y)\in(\Delta)\Leftrightarrow(-x-3y+4)(9x-3y-2)=0$$

$$M(x;y)\in(\Delta)\Leftrightarrow d(M;(D))=d(M;(D'))$$

$$\Leftrightarrow \frac{|4x-3y+1|}{5}=\frac{|5x-3|}{5}$$

$$\Leftrightarrow |4x-3y+1|=|5x-3|$$

$$\Leftrightarrow (4x-3y+1)^2=(5x-3)^2$$

$$\Leftrightarrow (4x-3y+1)^2-(5x-3)^2=0$$

$$\Leftrightarrow (-x-3y+4)(9x-3y-2)=0$$

$b)$ نستنتج المجموعة (Δ)

$$M(x;y)\in(\Delta)\Leftrightarrow(-x-3y+4)(9x-3y-2)=0$$

$$\Leftrightarrow -x-3y+4=0 \quad ou \quad 9x-3y-2=0$$

إذن $(\Delta)=(\Delta_1)\cup(\Delta_2)$ حيث $(\Delta_1):-x-3y+4=0$ و $(\Delta_2):9x-3y-2=0$

نتأكد أن $(\Delta_2)\perp(\Delta_1)$

لدينا $9\times-1+(-3)\times(-3)=0$ إذن $(\Delta_2)\perp(\Delta_1)$