التمرين1

$$f(x)=x-1+\frac{1}{x-2}$$

أ) نحدد D_f

$$D_f=\mathbb{R}-\{2\}$$

ب) نحدد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x-1+\frac{1}{x-2}=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x-1+\frac{1}{x-2}=-\infty$$

ج) حدد $\lim_{x\to2^+} f(x)$ و $\lim_{x\to2^-} f(x)$ و أول النتيجتين هندسيا

$$\lim_{x\to2^+} f(x)=\lim_{x\to2^+} x-1+\frac{1}{x-2}=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to2^-} f(x)=\lim_{x\to2^-} x-1+\frac{1}{x-2}=-\infty$$

ومنه المستقيم ذا المعادلة $x=2$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f)

-2 أ) نبين أن $\forall x\in D_f \quad f'(x)=\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$

$$\forall x\in\mathbb{R}-\{2\} \qquad f(x)=x-1+\frac{1}{x-2}$$

f دالة قابلة للاشتقاق في كل نقطة من $\mathbb{R}-\{2\}$ (لأن f دالة جذرية)

$$\forall x\in\mathbb{R}-\{2\} \qquad f'(x)=1-\frac{1}{(x-2)^2}=\frac{(x-2)^2-1}{(x-2)^2}=\frac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^2}$$

ب) ندرس تغيرات f و نعطي جدول تغيراتها

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(x-3)(x-1)$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	‖	-	0	+	
f	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

-3 نحدد معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الأفصول 0

معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الأفصول 0 هي $y=f'(0)x+f(0)$

أي هي $y=-\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}$

-4 نبين أن النقطة $A(2;1)$ مركز تماثل للمنحنى (C_f)

$$\forall x\in\mathbb{R}-\{2\} \qquad 4-x\in\mathbb{R}-\{2\}$$

و $f(4-x)=3-x+\frac{1}{2-x}$; $2-f(x)=2-x+1-\frac{1}{x-2}=3-x+\frac{1}{2-x}$

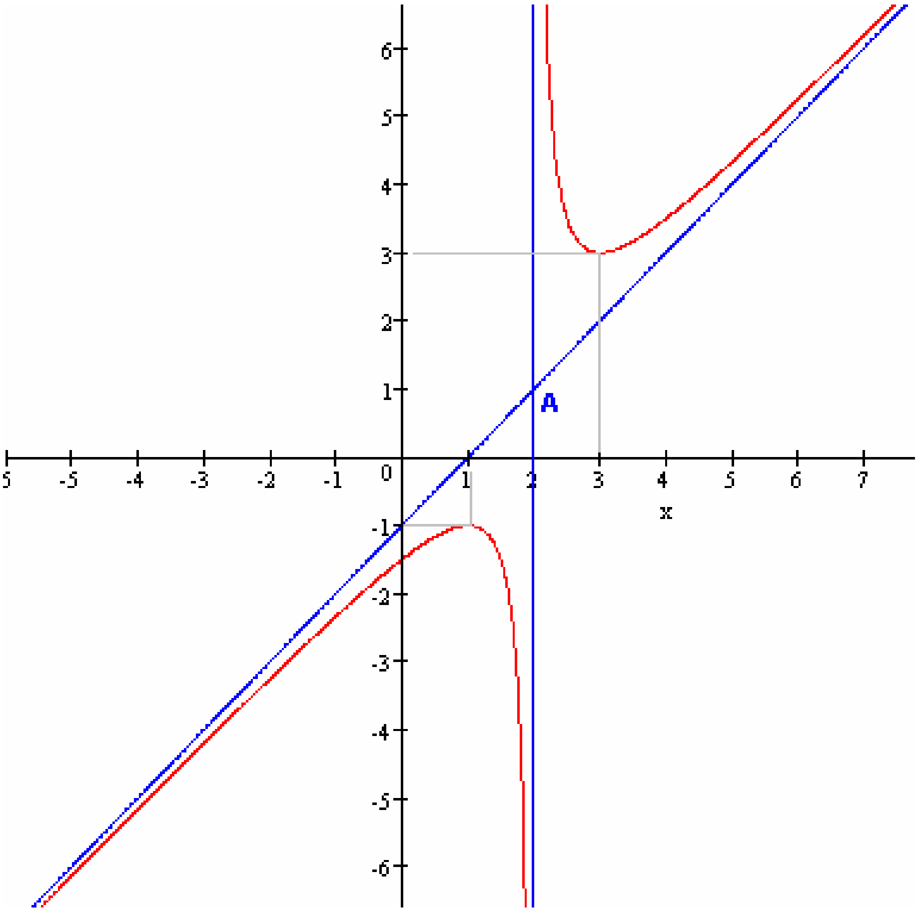
ومنه $f(4-x)=2-f(x)$ إذن $A(2;1)$ مركز تماثل للمنحنى (C_f)

5- نبين أن المستقيم ذا المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى $\left(C_f\right)$ بجوار $+\infty$ و $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-(x-1)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-2}=0 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-2}=0$$

إذن المستقيم ذا المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى $\left(C_f\right)$ بجوار $+\infty$ و $-\infty$

6- ننشئ $\left(C_f\right)$



التمرين2

$$f(x)=\frac{1-\cos x}{\sin x}$$

1- أ) نحدد D_f

$$D_f=\mathbb{R}-\{k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$$

ب) نبين أن f دالة فردية

لدينا $\forall x\in\mathbb{R}-\{k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$: $-x\in\mathbb{R}-\{k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$

$$f(-x)=\frac{1-\cos(-x)}{\sin(-x)}=\frac{1-\cos x}{-\sin x}=-=\frac{1-\cos x}{\sin x}=-f(x)$$

إذن f دالة فردية

د) نبين أن f دورية دورها 2π

$x+2\pi\in\mathbb{R}-\{k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$ $\quad \forall x\in\mathbb{R}-\{k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$

$$f(x+2\pi)=\frac{1-\cos(x+2\pi)}{\sin(x+2\pi)}=\frac{1-\cos x}{\sin x}=f(x)$$

f دورية دورها 2π

ملاحظة: بما أن f دورية دورها 2π و f دالة فردية فان مجموعة الدراسة هي $D_E =]0;\pi[$

ج) نبين $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ ثم نحدد $\lim_{x\to \pi^-} f(x)$ مع تأويل النتيجة هندسيا

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} x\frac{\frac{1-\cos x}{x^2}}{\frac{\sin x}{x}} = 0\times\frac{\frac{1}{2}}{1} = 0$$

$\lim_{x\to \pi^-} f(x) = \lim_{x\to \pi^-} \frac{1-\cos x}{\sin x} = +\infty$ ومنه المستقيم ذا المعادلة $x=\pi$ مقارب للمنحنى (C_f)

-2 أ) نبين أن $\forall x\in]0;\pi[\quad f'(x) = \frac{1}{1+\cos x}$

$$\forall x\in]0;\pi[\quad f'(x) = \frac{\sin^2 x - (1-\cos x)\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x} = \frac{1}{1+\cos x}$$

ب) ندرس تغيرات f على $]0;\pi[$ و نعطي جدول تغيراتها

$\forall x\in]0;\pi[\quad f'(x) \succ 0$ لأن $\forall x\in]0;\pi[\quad 1+\cos x \succ 0$

ومنه f تزايدية على $]0;\pi[$

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ π
f	$0 \nearrow +\infty$

-3 أ) نحدد تقعر (C_f)

لدينا $\forall x\in]0;\pi[\quad f'(x) = \frac{1}{1+\cos x}$

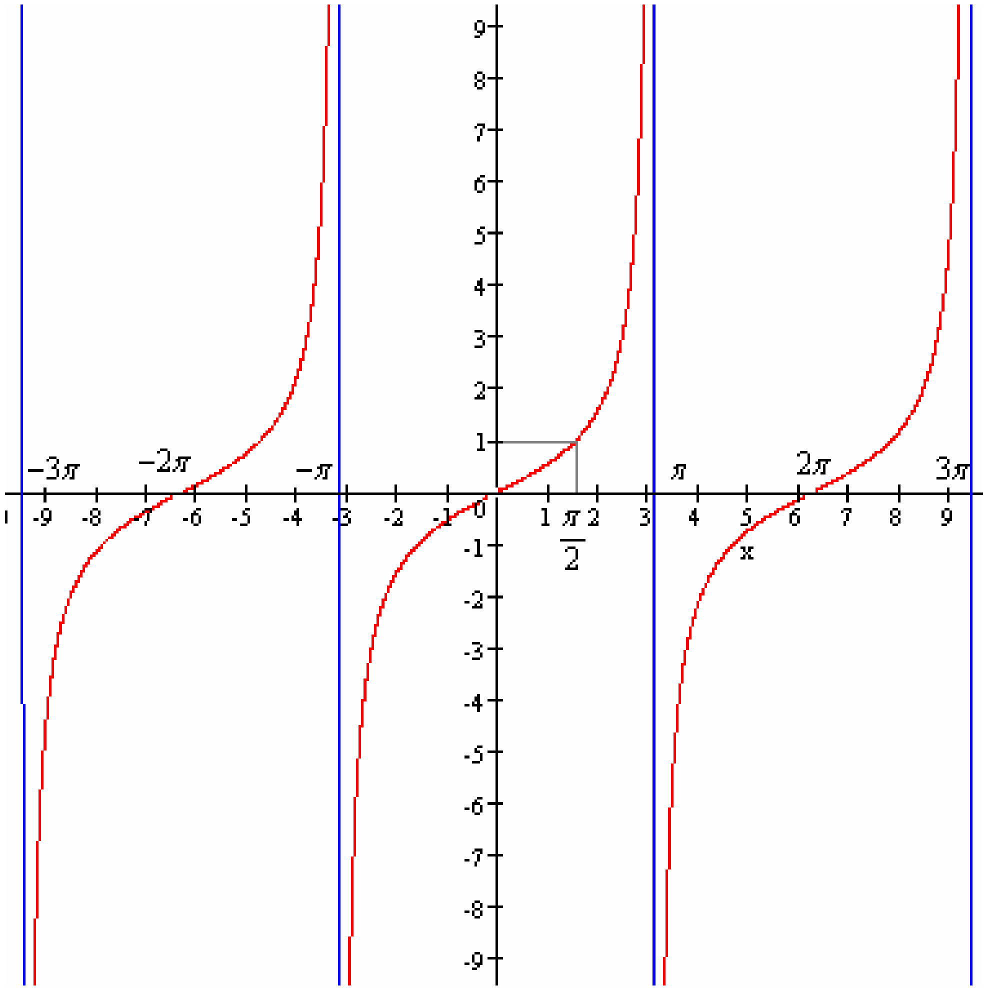
$$\forall x\in]0;\pi[\quad f''(x) = \frac{\sin x}{(1+\cos x)^2}$$

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ π
$f''(x)$	$+$

إذن (C_f) محدب على $]0;\pi[$ و حيث f فردية فان (C_f) مقعر على $]-\pi;0[$

وبما أن f دورية دورها 2π فان (C_f) محدب على كل مجال من شكل $]2k\pi;\pi+2k\pi[$ و مقعر على $]-\pi+2k\pi;2k\pi[$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

ب) ننشئ (C_f)



ملاحظة: $\left(C_f\right)$ متقطع عند النقط ذات الأفاصيل $2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$