تصحيح فرض شهر يناير2005 (1س.ب.ع.ر)
الرياضيات بالثانوي

تمرين1

ABC مثلث متساوي الساقين في A حيث $[2\pi]$ $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{2\pi}{3}$

$R_C=r\left(C;\frac{\pi}{6}\right)$ و $R_A=r\left(A;\frac{2\pi}{3}\right)$. نضع $f=R_C\circ R_A$

1- نحدد $f(B)$

لدينا $[2\pi]$ $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{2\pi}{3}$ و $AB=AC$ ومنه $R_A(B)=C$

و بالتالي $f(B)=R_C\circ R_A(B)=R_C(R_A(B))=R_C(C)=C$

2- نبين أن f دوران محددا زاويته

لدينا $R_C=r\left(C;\frac{\pi}{6}\right)$ و $R_A=r\left(A;\frac{2\pi}{3}\right)$ و $f=R_C\circ R_A$ ومنه f دوران زاويته $\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$

3- أ) نبين أن $R_C=S_{(CI)}\circ S_{(CA)}$ و $R_A=S_{(CA)}\circ S_{(IA)}$

I نقطة تقاطع المنصفات الداخلية للمثلث ABC

*لدينا (IA) و (CA) يتقاطعان في A ومنه $S_{(CA)}\circ S_{(IA)}$ دوران مركزه A و زاويته $2\left(\overrightarrow{AI};\overrightarrow{AC}\right)$

وحيث أن (IA) منصف $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ فان $[2\pi]$ $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv 2\left(\overrightarrow{AI};\overrightarrow{AC}\right)$

و لدينا $[2\pi]$ $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{2\pi}{3}$ ومنه $S_{(CA)}\circ S_{(IA)}=r\left(A;\frac{2\pi}{3}\right)=R_A$

* لدينا (IC) و (CA) يتقاطعان في C ومنه $S_{(CI)}\circ S_{(CA)}$ دوران مركزه C و زاويته $2\left(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CI}}\right)$

وحيث أن (IC) منصف $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)$ فان $[2\pi]$ $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)\equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CI}}\right)$

و لدينا ABC مثلث متساوي الساقين في A حيث $[2\pi]$ $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{2\pi}{3}$ ومنه $[2\pi]$ $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)\equiv\frac{\pi}{6}$

ومنه $S_{(CI)}\circ S_{(CA)}=r\left(C;\frac{\pi}{6}\right)=R_C$

ب) نستنتج أن I مركز الدوران f

$$f(I)=R_C\circ R_A(I)$$
$$f(I)=S_{(CI)}\circ S_{(CA)}\circ S_{(CA)}\circ S_{(IA)}(I)$$
$$f(I)=S_{(CI)}\circ\left(S_{(CA)}\circ S_{(CA)}\right)\left(S_{(IA)}(I)\right)$$
$$f(I)=S_{(CI)}\left[\left(S_{(CA)}\circ S_{(CA)}\right)(I)\right]$$
$$f(I)=S_{(CI)}\left[Id_{((P))}(I)\right]$$
$$f(I)=S_{(CI)}(I)=I$$

إذن I مركز الدوران f

ج) نبين أن $[2\pi]$ $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{IA'}\right)\equiv\frac{\pi}{6}$

$f(A)=A'$ ومنه $[2\pi]$ $\left(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IA'}\right)\equiv\frac{5\pi}{6}$

(IA) منصف $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ ومنه $[2\pi]$ $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AI}\right)\equiv\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{3}$

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{IA'}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AI}\right)+\left(\overrightarrow{AI};\overrightarrow{IA'}\right)\quad[2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{IA'}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AI}\right)+\left(-\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IA'}\right)\quad[2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{IA'}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AI}\right)+\left(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IA'}\right)-\pi\quad[2\pi]$$

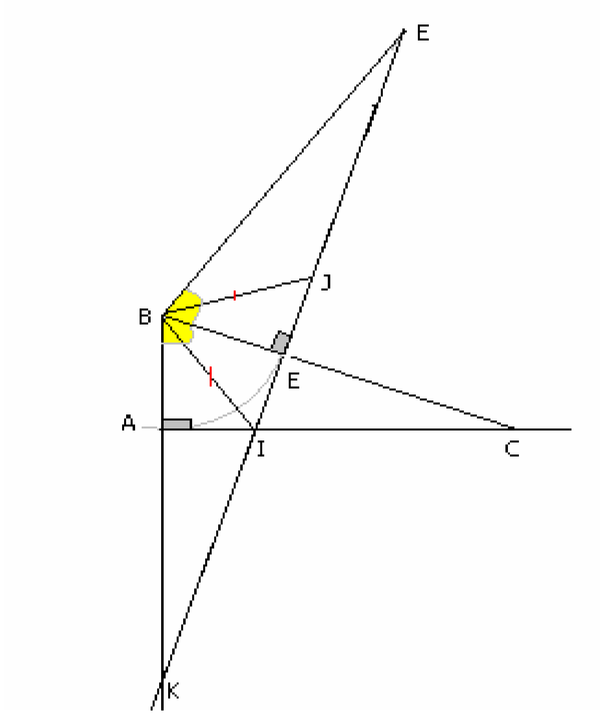
$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{IA'}\right)\equiv\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}-\pi\quad[2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{IA'}\right)\equiv\frac{\pi}{6}\quad[2\pi]$$

تمرين 2

ABC مثلثا قائم الزاوية في A و $[2\pi]$ $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)\equiv\alpha$ و $r=R(B;\alpha)$

1- ننشئ E و F حيث $r(C)=F\ ;\ r(A)=E$



2- بين أن $(EF)\perp(BC)$

بما أن $r(C)=F\ ;\ r(A)=E$ و $r(B)=B$ فان $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv\left(\overrightarrow{EF};\overrightarrow{EB}\right)$

وحيث أن $[2\pi]$ $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}$ فان $[2\pi]$ $\left(\overrightarrow{EF};\overrightarrow{EB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}$ ومنه $(EF)\perp(EB)$

لدينا $r(B)=B$ و $r(A)=E$ ومنه $[2\pi]$ $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BE}\right)\equiv\alpha\equiv\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)$ و بالتالي $(BC)=(BE)$

إذن $(EF)\perp(BC)$

3- أ- نبين أن النقط E و F و J مستقيمية

لدينا I و C و A مستقيمية و $r(C)=F\ ;\ r(A)=E$ و $r(I)=J$

ومنه النقط J و E و F مستقيمية

ب- نبين أن E منتصف $[IJ]$

لدينا $r(I)=J$ و منه BIJ مثلث متساوي الساقين في الرأس B

وحيث أن $(IJ)\perp(EB)$ لأن $(IJ)=(EF)$ ومنه (EB) ارتفاع في المثلث BIJ

و بالتالي (EB) متوسط للمثلث BIJ إذن E منتصف $[IJ]$

-4 نبين أن $r(K)=C$

$(AB)\cap(IJ)=\{K\}$

لدينا $[2\pi]$ $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BF})\equiv\alpha\equiv(\overrightarrow{BK};\overrightarrow{BC})$ ومنه (BC) منصف $(\widehat{KBF})$ وحيث أن $(EF)\perp(BC)$

فان المثلث KBF مثلث متساوي الساقين في الرأس B ومنه $BF=BK$

وحيث أن $r(C)=F$ فان $BC=BF$ و بالتالي $BC=BK$

إذن لدينا $[2\pi]$ $(\overrightarrow{BK};\overrightarrow{BC})\equiv\alpha$ و $BC=BK$ ومنه $r(K)=C$

تمرين3

نعتبر في $\mathbb{R}$ المعادلة (E) $\quad \cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cos 9x=0$

-1 بين أن $\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cos 9x=4\cos 2x\cdot\cos 3x\cdot\cos 4x$

نعلم أن $\cos(p)+\cos(q)=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

$$\begin{aligned}\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cos 9x&=\cos x+\cos 9x+\cos 3x+\cos 5x\\&=2\cos 4x\cdot\cos 5x+2\cos 4x\cdot\cos x\\&=2\cos 4x(\cos 5x+\cos x)\\&=4\cos 4x\cdot\cos 3x\cdot\cos 2x\end{aligned}$$

-2 نستنتج حلول المعادلة (E)

$$\begin{aligned}\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cos 9x=0&\Leftrightarrow 4\cos 4x\cdot\cos 3x\cdot\cos 2x=0\\&\Leftrightarrow \cos 4x=0\ ;\ \cos 3x=0\ ;\ \cos 2x=0\\&\Leftrightarrow 4x=\frac{\pi}{2}+k\pi\ ;\ 3x=\frac{\pi}{2}+k\pi\ ;\ 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\&\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}\ ;\ x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\ ;\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\end{aligned}$$

إذن $S=\left\{x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}/k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}/k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}/k\in\mathbb{Z}\right\}$

تمرين4

نعتبر $f(x)=\frac{\sin 5x}{\sin x}-\frac{\cos 5x}{\cos x}$

-1 نحدد D_f

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}\qquad x\in D_f&\Leftrightarrow \cos x\neq 0\quad et\quad \sin x\neq 0\\&\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\quad et\quad x\neq k\pi\quad /k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

$$D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\{k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$$

-2 نحل في $[0;\pi]$ المتراجحة $f(x)\leq 2$

ليكن $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$

$$f(x)\le 2 \Leftrightarrow \frac{\sin 5x}{\sin x}-\frac{\cos 5x}{\cos x}\le 2$$

$$f(x)\le 2 \Leftrightarrow \frac{\sin 5x\cdot\cos x-\cos 5x\cdot\sin x-2\sin x\cdot\cos x}{\sin x\cdot\cos x}\le 0$$

$$f(x)\le 2 \Leftrightarrow \frac{\sin 4x-2\sin x\cdot\cos x}{\sin x\cdot\cos x}\le 0$$

$$f(x)\le 2 \Leftrightarrow \frac{2\sin 2x\cdot\cos 2x-2\sin x\cdot\cos x}{\sin x\cdot\cos x}\le 0$$

$$f(x)\le 2 \Leftrightarrow \frac{4\sin x\cdot\cos x\cdot\cos 2x\cdot -2\sin x\cdot\cos x}{\sin x\cdot\cos x}\le 0$$

$$f(x)\le 2 \Leftrightarrow 2\cos 2x-1\le 0$$

$$f(x)\le 2 \Leftrightarrow 4\cos^2 x-3\le 0$$

$$f(x)\le 2 \Leftrightarrow \left(2\cos x-\sqrt{3}\right)\left(2\cos x+\sqrt{3}\right)\le 0$$

$$\forall x\in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[\qquad 2\cos x-\sqrt{3}=0\Leftrightarrow \frac{\pi}{6}$$

$$\forall x\in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[\qquad 2\cos x+\sqrt{3}=0\Leftrightarrow \frac{5\pi}{6}$$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$2\cos x-\sqrt{3}$		+	0	-		-		-	
$2\cos x+\sqrt{3}$		+		+		+	0	-	
$\left(2\cos x-\sqrt{3}\right)\left(2\cos x+\sqrt{3}\right)$		+	0	-		-	0	+	

$$S=\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[\cup\left[\frac{5\pi}{6};\pi\right[$$