تصحيح فرض شهر أكتوبر 2004

موقع الرياضيات بالثانوي

تمرين1

-1 نبين بالترجع أن 4^n+6n-1 تقبل القسمة على 9

* من أجل $n=0$ لدينا $4^0+6\times 0-1=0$ ومنه $4^0+6\times 0-1$ تقبل القسمة على 9

* لنفترض أن 4^n+6n-1 تقبل القسمة على 9 عبارة صحيحة حتى الرتبة n

نبين أن $4^{n+1}+6(n+1)-1$ تقبل القسمة على 9

$$4^{n+1}+6(n+1)-1=4^n\cdot 4+6n+5$$
$$=4^n\cdot 4+6n\cdot 4-3\cdot 6n+9-4$$
$$=4\left(4^n+6n-1\right)-9(2n-1)$$

بما أن العددين 4^n+6n-1 و $9(2n-1)$ يقبلان معا القسمة على 9

فان $4^{n+1}+6(n+1)-1$ تقبل القسمة على 9

إذن $9\,|\,4^n+6n-1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

-2 ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ نضع $u_n=\underbrace{77777......7}_{\text{(n) رقم مساوية ل 7}}$

نبين بالترجع أن $u_n=\frac{7}{9}\left(10^n-1\right) \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

* لدينا $u_1=7$ و $\frac{7}{9}\left(10^1-1\right)=7$ إذن العبارة صحيحة من أجل $n=1$

* نفترض أن $u_n=\frac{7}{9}\left(10^n-1\right)$ عبارة صحيحة حتى الرتبة n رقم مساوية لـ7

نبين أن $u_{n+1}=\frac{7}{9}\left(10^{n+1}-1\right)$

$$u_{n+1}=\underbrace{77777......7}_{\text{(n+1) رقم مساوية ل 7}}$$

ومنه

$$u_{n+1}=\underbrace{77777......7}_{\text{(n) رقم مساوية ل 7}}+7\cdot 10^n$$

أي أن $u_{n+1}=\frac{7}{9}\left(10^n-1\right)+7\cdot 10^n=\frac{7}{9}\left(10^n-1+9\cdot 10^n\right)=\frac{7}{9}\left(10\times 10^n-1\right)$

ومنه $u_{n+1}=\frac{7}{9}\left(10^{n+1}-1\right)$

إذن $u_n=\frac{7}{9}\left(10^n-1\right) \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

تمرين2

ليكن A و B جزئين من المجموعة E حيث $A\subset B$

نحل في $\mathcal{P}(E)$ المعادلة $X\cap B=X\cup A$

لتكن S مجموعة حلول المعادلة

* لدينا $A\subset X\cup A$ و $X\subset X\cup A$

و حيث أن $X\cap B=X\cup A$ فان $A\subset X\cap B$ و $X\subset X\cap B$

وبالتالي $A\subset X$ و $X\subset B$ ومنه $A\subset X\subset B$

ومنه $S \subset \{X \in P(E) / A \subset X \subset B\}$

* ليكن $X \in P(E)$ حيث $A \subset X \subset B$

لدينا $X \cup A = X \quad et \quad X \cap B = X$ ومنه $X \cap B = X \cup A$ أي X حل للمعادلة

و بالتالي $\{X \in P(E) / A \subset X \subset B\} \subset S$

إذن $S = \{X \in P(E) / A \subset X \subset B\}$

تمرين3

نعتبر التطبيق f المعرف من $\left[\frac{-1}{2};+\infty\right[$ نحو $\left[\frac{3}{4};+\infty\right[$

بـ $f(x) = x^2 + x + 1$

نبين أن f تقابلي و نحدد التقابل العكسي f^{-1}

ليكن $x \in \left[\frac{-1}{2};+\infty\right[$ و $y \in \left[\frac{3}{4};+\infty\right[$

$$f(x) = y \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = y$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = y - \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{1}{2} = \sqrt{y - \frac{3}{4}}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{y - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2}$$

و حيث أن $y \in \left[\frac{3}{4};+\infty\right[$ فان $\sqrt{y - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2} \geq -\frac{1}{2}$

اذن لكل $y \in \left[\frac{3}{4};+\infty\right[$ المعادلة $f(x) = y$ تقبل حلا وحيدا في $\left[\frac{-1}{2};+\infty\right[$

f تقابل من $\left[\frac{-1}{2};+\infty\right[$ نحو $\left[\frac{3}{4};+\infty\right[$

و $f^{-1}(x) = \sqrt{x - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2} \qquad \forall x \in \left[\frac{3}{4};+\infty\right[$

تمرين4

نعتبر التطبيقين f و g المعرفين بـ:

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ x \to x+1 \end{array} \quad \text{و} \quad g: \begin{array}{lcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x \to & \begin{cases} 0 & ; x = 0 \\ x-1 & ; x \geq 1 \end{cases} \end{array}$$

-1 ندرس تباينية و شمولية و تقابلية كل من f و g

* لدينا $\forall (x;y) \in \mathbb{N}^2 \qquad f(x) = f(y) \Rightarrow x + 1 = y + 1 \Rightarrow x = y$

إذن f تبايني

لدينا $f(x)\neq 0 \quad \forall x\in\mathbb{N}$ ومنه 0 لا يقبل سابقا في $\mathbb{N}$ بواسطة f

ومنه f ليس شمولي، ليس تقابلي

* - لدينا و $g(0)=g(1)=0$ و $0\neq 1$ إذن g ليس تبايني ، ليس تقابلي

- ليكن $y\in\mathbb{N}$

$$g(x)=y \Leftrightarrow x-1=y \Leftrightarrow x=y+1$$

وحيث $y\in\mathbb{N}$ فان $y+1\in\mathbb{N}^*$ ومنه المعادلة $g(x)=y$ تقبل على الأقل حل في $\mathbb{N}$

إذن g شمولي

-2 نحدد $g\circ f$ و $f\circ g$

لتكن $x\in\mathbb{N}$

* $g\circ f(x)=g(f(x))=g(x+1)=x+1-1=x$

* إذا كان $x\in\mathbb{N}^*$ فان $f\circ g(x)=f(g(x))=f(x-1)=x-1+1$

$f\circ g(0)=f(0)=1$

تمرين5

-1 نحل في $]\pi;4\pi]$ المتراجحة $4\sin^2 x-2\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\sin x-\sqrt{6}\prec 0$

ليكن Δ' المميز المختصر لثلاثية الحدود $4X^2-2\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)X-\sqrt{6}$

$$\Delta'=\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2+4\sqrt{6}=\sqrt{3}^2+\sqrt{2}^2+2\sqrt{6}=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$$

ومنه جدرا ثلاثية الحدود هما $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

ومنه $4X^2-2\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)X-\sqrt{6}=4\left(X-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(X+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

و بالتالي $4\sin^2 x-2\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\sin x-\sqrt{6}\prec 0 \Leftrightarrow 4\left(\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\prec 0$

$$x\in]\pi;4\pi] \qquad \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow x=\frac{9\pi}{4} \quad ou \quad x=\frac{11\pi}{4}$$

$$x\in]\pi;4\pi] \qquad \sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow x=\frac{4\pi}{3} \quad ou \quad x=\frac{5\pi}{3} \quad ou \quad x=\frac{10\pi}{3} \quad ou \quad x=\frac{11\pi}{3}$$

جدول الإشارة

x	π		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{3}$		$\frac{9\pi}{4}$		$\frac{11\pi}{4}$		$\frac{10\pi}{3}$		$\frac{11\pi}{3}$		4π
$\left(\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$		-		-		-	0	+	0	-		-		-	
$\left(\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$		+	0	-	0	+		+		+	0	-	0	+	
$4\left(\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$		-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	

$$S=\left]\pi;\frac{4\pi}{3}\right[\cup\left]\frac{5\pi}{3};\frac{9\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{11\pi}{4};\frac{10\pi}{3}\right[\cup\left]\frac{11\pi}{3};4\pi\right]$$

-2 نحل في $[0;2\pi]$ المتراجحة $\frac{1}{\cos x}\geq\frac{1}{\sin x}$

ليكن $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[\cup\left]\pi;\frac{3\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{3\pi}{2};2\pi\right[$

$$\frac{1}{\cos x}\geq\frac{1}{\sin x}\Leftrightarrow\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\sin x}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin x-\cos x}{\cos x\cdot\sin x}\geq 0$$

$x\in[0;2\pi]\qquad \sin x=\cos x\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}\quad ou\quad x=\frac{5\pi}{4}$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\sin x$	0	+		+		+	0	-		-		-	0
$\cos x$		+		+	0	-		-		-	0	+	
$\sin x-\cos x$		-	0	+		+		+	0	-		-	
$\frac{\sin x-\cos x}{\sin x\cdot\cos x}$		-	0	+		-		+	0	-		+	

$$S=\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\pi;\frac{5\pi}{4}\right]\cup\left]\frac{3\pi}{2};2\pi\right[$$