تصحيح فرض شهر مارس2005 Moustaouli Mohamed	1 سلك بكالوريا علوم الرياضيات

تمرين1

صندوق يحتوي على 5 كرات حمراء و 5 كرات بيضاء و 5 كرات خضراء في كل لون الكرات

تحمل الأرقام 1 و2 و3 و4 و5 . نسحب بالتتابع و بدون إحلال خمس كرات من الصندوق.

1- نحسب عدد السحبات المكنة للحصول على3 كرات بيضاء و كرتين حمراويين.

عدد هذه السحبات هو $C_5^3 A_5^3 A_5^2 = \dfrac{60}{3!}\times 60\times 20 = 12000$

2- نحسب عدد السحبات المكنة للحصول على 5 كرات تحقق الشرطين:

- كرة واحدة تحمل الرقم 5.
- أربع كرات فقط من اللون الأخضر

عدد هذه السحبات هو $C_5^1 A_2^1 A_4^4 + C_5^1 A_1^1 C_4^3 A_4^3 A_8^1 = 240+160 = 400$

تمرين2

$$f(x)=\frac{\sqrt{5-\cos x}-2}{x^2}$$

1- نين أن f تقبل تمديدا بالاتصال في 0 و نحدده.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5-\cos x}-2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{5-\cos x}+2}\times\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{8}$$

ومنه f تقبل تمديدا بالاتصال في 0 و تمديدها بالاتصال في 0 هو الدالة g المعرفة بـ:

$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{\sqrt{5-\cos x}-2}{x^2} \quad ; \quad x\neq 0 \\ g(0)=\dfrac{1}{8} \end{cases}$$

-2 نبين أن $|f(x)|\le\dfrac{1}{x^2}$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$ و نستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$-1\le\cos x\le 1$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$ ومنه $0\le\sqrt{5-\cos x}-2\le\sqrt{6}-2\prec 1$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$

و بالتالي $0\le\dfrac{\sqrt{5-\cos x}-2}{x^2}\le\dfrac{1}{x^2}$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$ إذن $|f(x)|\le\dfrac{1}{x^2}$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$

وحيث $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ فان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

تمرين3

نحسب النهايات التالية:

* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{2x^2+x-3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(2x+3)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{2x+3}=\dfrac{3}{5}$

* لدينا $-1\le\sin\dfrac{1}{x}\le 1$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$ ومنه $\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|\le|x|$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$ وحيث $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$ فان $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1-\sqrt{x^2+3x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x+2}{x+1+\sqrt{x^2+3x-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1+\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{1}{x}+\sqrt{1+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}}}=-\dfrac{1}{2}$

$$\lim_{x\to-\infty} x+1-\sqrt{x^2+3x-1}=\lim_{x\to-\infty} x\left(1+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x-1}{\tan^2 x+3}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\frac{1}{\tan x}}{\tan x+\frac{3}{\tan x}}=0 \quad * \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x+3}{x-3\sqrt{x}+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{2}{x}}=1 \quad *$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin^2\pi x}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sin^2(\pi x-\pi)}{x-1}=\lim_{x\to1}\pi^2(x-1)\times\frac{\sin^2\pi(x-1)}{\left[\pi(x-1)\right]^2}=0\times1=0*$$

* $\forall x\in\mathbb{R}^*\quad \frac{1}{x}-1\prec E\left(\frac{1}{x}\right)\le\frac{1}{x}$ ومنه $\forall x\succ0\quad 1-x\prec xE\left(\frac{1}{x}\right)\le1$ و $\forall x\prec0\quad 1\le xE\left(\frac{1}{x}\right)\prec1-x$

وحيث $\lim_{x\to0}1-x=1$ فان $\lim_{x\to0}xE(\frac{1}{x})=1$

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos3x-\cos x}{2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin2x.\sin x}{2x^2}=\lim_{x\to0}-2\times\frac{\sin2x}{2x}\times\frac{\sin x}{x}=-2 \quad *$$

تمرين4

نحسب المجاميع التالية $S_n=\sum_{i=0}^{n}(-1)^iC_n^i$ و $S_n^{'}=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+1}C_n^i$ و $S_{(n;p)}=\sum_{i=0}^{p}C_n^i\cdot C_{n-i}^{p-i}$

* نعلم أن $(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^ia^ib^{n-i}$

نضع $a=-1$ و $b=1$ ومنه $S_n=\sum_{i=0}^{n}(-1)^iC_n^i=0$

* لدينا $\frac{1}{i+1}C_n^i=\frac{1}{i+1}\times\frac{n!}{(n-i)!i!}=\frac{n!}{(n-i)!(i+1)!}=\frac{1}{n+1}\times\frac{(n+1)!}{(n-i)!(i+1)!}=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{i+1}$

ومنه

$$S_n^{'}=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+1}C_n^i=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{i+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}C_{n+1}^{i+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}C_{n+1}^i$$

$$S_n^{'}=\frac{1}{n+1}\left(-C_{n+1}^0+\sum_{i=0}^{n+1}C_{n+1}^i\right)$$

و حيث أن $\sum_{i=0}^{n+1}C_{n+1}^i=2^{n+1}$ فان $S_n^{'}=\frac{1}{n+1}\left(-1+2^{n+1}\right)$

* لدينا $C_n^iC_{n-i}^{p-i}=\frac{n!}{(n-i)!i!}\times\frac{(n-i)!}{(n-i-p+i)!(p-i)!}=\frac{n!}{i!}\times\frac{1}{(n-p)!(p-i)!}=\frac{n!}{(n-p)!p!}\times\frac{p!}{i!(p-i)!}$

أي أن $C_n^iC_{n-i}^{p-i}=C_n^pC_p^i$

وبالتالي $S_{(n;p)}=\sum_{i=0}^{p}C_n^i\cdot C_{n-i}^{p-i}=\sum_{i=0}^{p}C_n^pC_p^i=C_n^p\sum_{i=0}^{p}C_p^i=2^pC_n^p=2^p\times\frac{n!}{(n-p)!p!}$

تمرين5

لتكن E مجموعة منتهية حيث $cardE=n\ge2$

نحدد عدد التطبيقات f المعرفة من E نحو E حيث $card\left[f(E)\right]=\frac{n}{2}$ (n زوجي)

نعتبر $F=\left\{y_1;y_2;.......;y_{\frac{n}{2}}\right\}$ و $f(E)=$ $Y_i=\{\varphi/\forall x\in E;\quad \varphi(x)\neq y_i\}$ حيث φ تطبيق من E نحو F

لدينا $\varphi\in Y_i \Leftrightarrow \varphi$ تطبيق من E نحو $F-\{y_i\}$

عدد التطبيقات المعرفة من E نحو $F-\{y_i\}$ هو $cardY_i=\left(\frac{n}{2}-1\right)^n$

y_i تقبل على الأقل سابق بالتطبيق f في $E \Leftrightarrow f\in\overline{Y_i}$

كل عنصر من F يقبل على الأقل سابق بـ f في E (أي f شمولي من E نحو F) $\Leftrightarrow f\in\bigcap_{i\in\left[\!\left[1;\frac{n}{2}\right]\!\right]}\overline{Y_i}$

ومنه عدد التطبيقات الشمولية من E نحو F هو $card\bigcap_{i\in\left[\!\left[1;\frac{n}{2}\right]\!\right]}\overline{Y_i}$

لدينا عدد التطبيقات المعرفة من E نحو F هو $\left(\frac{n}{2}\right)^n$

ومنه $card\bigcup_{i\in\left[\!\left[1;\frac{n}{2}\right]\!\right]}Y_i$ $-$ $\left(\frac{n}{2}\right)^n$ $=card\overline{\bigcup_{i\in\left[\!\left[1;\frac{n}{2}\right]\!\right]}Y_i}=card\bigcap_{i\in\left[\!\left[1;\frac{n}{2}\right]\!\right]}\overline{Y_i}$

$\varphi\in Y_{i_1}\cap Y_{i_2}\cap\ldots\cap Y_{i_k}\Leftrightarrow\varphi$ تطبيق من E نحو $F-\left\{y_{i_1};y_{i_2};....y_{i_k}\right\}$

ومنه $card\left(Y_{i_1}\cap Y_{i_2}\cap\ldots\cap Y_{i_k}\right)=\left(\frac{n}{2}-k\right)^n$

$$card\bigcup_{i\in\left[\!\left[1;\frac{n}{2}\right]\!\right]}Y_i=\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}(-1)^{k-1}\left(\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\prec\frac{n}{2}}card\left(Y_{i_1}\cap Y_{i_2}\cap\ldots\cap Y_{i_k}\right)\right)$$

لدينا $C_{\frac{n}{2}}^k$ طريقة لاختيار $1\le i_1\le\ldots\le i_k\prec\frac{n}{2}$ ومنه $card\bigcup_{i\in\left[\!\left[1;\frac{n}{2}\right]\!\right]}Y_i=\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}(-1)^{k-1}C_{\frac{n}{2}}^k\left(\frac{n}{2}-k\right)^n$

إذن عدد التطبيقات الشمولية من E نحو F هو $\left(\frac{n}{2}\right)^n-\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}(-1)^{k-1}C_{\frac{n}{2}}^k\left(\frac{n}{2}-k\right)^n$

لدينا $C_n^{\frac{n}{2}}$ لاختيار مجموعة F حيث $cardF=\frac{n}{2}$; $F\subset E$

إذن عدد التطبيقات من E نحو E حيث $card\left[f(E)\right]=\frac{n}{2}$ هو $C_n^{\frac{n}{2}}\left[\left(\frac{n}{2}\right)^n-\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}(-1)^{k-1}C_{\frac{n}{2}}^k\left(\frac{n}{2}-k\right)^n\right]$