تمرين1

$(u_n)_{n\geq1}$ متتالية **حسابية** حيث $u_3=-4$ و $u_8=6$

1- نبين أن 2 أساس المتتالية الحسابية $(u_n)_{n\geq1}$

ليكن r أساس للمتتالية الحسابية $(u_n)_{n\geq1}$

ومنه $u_8=u_3+5r$ أي $6=-4+5r$ إذن $r=2$

2- نكتب u_n بدلالة n

$(u_n)_{n\geq1}$ متتالية حسابية أساسها 2 و $u_3=-4$

ومنه $u_n=u_3+2(n-3)=2n-10 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

3- نحسب المجموع $S=u_8+u_9+\dots\dots\dots+u_{57}$

$$S=u_8+u_9+\dots\dots\dots+u_{57}=\frac{50(u_8+u_{57})}{2}=25\times110=2750$$

تمرين2

(u_n) و (v_n) متتاليتين عدديتين معرفتين بما يلي $v_n=u_{n+1}-u_n$; $\begin{cases}u_0=0 \quad u_1=1\\ u_{n+2}=10u_{n+1}-9u_n\end{cases}$

1-نحسب u_2 و u_3 و v_0 و v_1

$u_2=10u_1-9u_0=10 \qquad u_3=10u_2-9u_1=91 \qquad v_0=u_1-u_0=1 \qquad v_1=u_2-u_1=9$

2- نبين أن (v_n) متتالية هندسية و نحسب v_n بدلالة n.

ليكن $n\in\mathbb{N}$

$$v_{n+1}=u_{n+2}-u_{n+1}=10u_{n+1}-9u_n-u_{n+1}=9(u_{n+1}-u_n)=9v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها 9 ى حدها الأول $v_0=1$

و منه $v_n=9^n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

نحسب بدلالة n المجموع $S_n=\sum_{i=0}^{i=n-1}v_i$

$$S_n=\sum_{i=0}^{i=n-1}v_i=v_0\frac{1-9^n}{1-9}=\frac{9^n-1}{8}$$

3 - نبين (w_n) ثابتة و نستنتج أن $u_{n+1}=9u_n+1$

لدينا $w_n=u_{n+1}-9u_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$$w_{n+1}=u_{n+2}-9u_{n+1}=u_{n+2}-9u_{n+1}=10u_{n+1}-9u_n-9u_{n+1}=u_{n+1}-9u_n=w_n \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

(w_n) ثابتة

و بالتالي $w_n=w_0=u_1-9u_0=1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

و منه $1=u_{n+1}-9u_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$ إذن $u_{n+1}=9u_n+1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

4- نحسب $S'_n=\sum_{i=0}^{i=n-1}u_i$

$S_n=\sum_{i=0}^{i=n-1}v_i=\frac{9^n-1}{8}$ ومنه $\sum_{i=0}^{i=n-1}u_{i+1}-u_i=\frac{9^n-1}{8}$

أي $(u_n-u_{n-1})+(u_{n-1}-u_{n-2})+(u_{n-2}-u_{n-3})+........+(u_2-u_1)+(u_1-u_0)=\dfrac{9^n-1}{8}$

ومنه $u_n-u_0=\dfrac{9^n-1}{8}$ أي $u_n=\dfrac{9^n-1}{8}=\dfrac{1}{8}v_n-\dfrac{1}{8}$

إذن $S'_n=\dfrac{1}{8}\left(\sum_{i=0}^{i=n-1}v_i\right)-\dfrac{n}{8}=\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{9^n-1}{8}\right)-\dfrac{n}{8}$

تمرين3

-1 نحسب النهايات

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3+x-2}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(2x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+2}{2x+1}=1$$

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}=\lim_{x\to3}\frac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)\left(\sqrt{x-2}+1\right)}{\left(\sqrt{x-2}-1\right)\left(\sqrt{x-2}+1\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)\left(\sqrt{x-2}+1\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x-2}+1}{\sqrt{x+1}+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x\sqrt{x}-1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}^3-1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}+1\right)(x+1)}=\frac{3}{4}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{\sin x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}^2}\times\frac{x}{\sin x}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{1-\cos t}{t^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-x=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{x}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}-\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{x}\right)}{-2}=+\infty$$

لدينا $|\sin x|\le1$ $\forall x\in\mathbb{R}$ أي $|x\sin x|\le|x|$ $\forall x\in\mathbb{R}$

ومنه $-x\le x\sin x\le x$ $\forall x\in\mathbb{R}$ و بالتالي $x\le x\sin x+2x\le3x$ $\forall x\in\mathbb{R}$

و حيث أن $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ فان $\lim_{x\to+\infty}x\sin x+2x=+\infty$

-2 نبين أن $\left|\dfrac{\sqrt{5-\cos x}-2}{x^2}\right|\le\dfrac{1}{x^2}$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$ و نستنتج $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{5-\cos x}-2}{x^2}$

ليكن $x\in\mathbb{R}^*$

$-1\le\cos x\le1$ ومنه $4\le5-\cos x\le6$ أي $4\le5-\cos x\le9$ ومنه $2\le\sqrt{5-\cos x}\le3$

و بالتالي $0\le\sqrt{5-\cos x}-2\le1$ اذن $\left|\dfrac{\sqrt{5-\cos x}-2}{x^2}\right|\le\dfrac{1}{x^2}$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$

و حيث $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ ومنه $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{5-\cos x}-2}{x^2}=0$

تمرين4

لتكن A و B نقطتين مختلفتين و(C) مجموعة النقط M حيث $AM^2+2MB^2-3MA\times MB=0$

-1 نبين أن $A\notin(C)$; $B\notin(C)$

$AA^2+2AB^2-3AA\times AB=2AB^2\neq 0$ إذن $A\notin(C)$

$AB^2+2BB^2-3BA\times BB=AB^2\neq 0$ إذن $B\notin(C)$

-2 نبين أن $\frac{MA}{MB}$ حل للمعادلة $x^2-3x+2=0$

$M\neq B$

$$AM^2+2MB^2-3MA\times MB=0\Leftrightarrow\left(\frac{AM}{MB}\right)^2+2-3\frac{MA}{MB}=0$$

$\frac{MA}{MB}$ حل للمعادلة $x^2-3x+2=0$

-3 نستنتج طبيعة (C).

$$M\in(C)\Leftrightarrow AM^2+2MB^2-3MA\times MB=0\Leftrightarrow\left(\frac{AM}{MB}\right)^2+2-3\frac{MA}{MB}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{MA}{MB}\,solution\text{ de }\ x^2-3x+2=0$$

حلا المعادلة $x^2-3x+2=0$ هما 1 و 2

إذن $\frac{MA}{MB}=1$ أو $\frac{MA}{MB}=2$

$$\frac{MA}{MB}=1\Leftrightarrow MA=MB$$

$\Leftrightarrow$ M تنتمي إلى (Δ) واسط $[AB]$

$$\frac{MA}{MB}=2\Leftrightarrow MA^2-4MB^2=0\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}^2-4\overrightarrow{MB}^2=0$$

$$\frac{MA}{MB}=2\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right)=0$$

ليكن G مرجح $(A;1)$ و $(B;-2)$ و ليكن G' مرجح $(A;1)$ و $(B;2)$

$$\frac{MA}{MB}=2\Leftrightarrow\left(-\overrightarrow{MG}\right)\left(3\overrightarrow{MG'}\right)=0\Leftrightarrow\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MG'}=0$$

$\frac{MA}{MB}=2\Leftrightarrow$ M تنتمي إلى الدائرة (Γ) التي قطرها $[GG']$

$$(C)=(\Gamma)\cup(\Delta)$$