تصحيح فرض دجنبر2004
موقع الرياضيات بالثانوي
1س.ب.ع.ر

تمرين1

1- نحدد D_f

لدينا $f(x)=\frac{1}{x+1}\sqrt{x^2-1}$: $\qquad D_f=]-\infty;-1[\cup[1;+\infty[$

2- جدول تغيرات الدالة h

لدينا $h(x)=-x^2+x$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
h		$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	

3- g المعرفة على D_f بـ $g(x)=[f(x)]^2$

أ- جدول تغيرات g

$\forall x\in]-\infty;-1[\cup[1;+\infty[\qquad g(x)=[f(x)]^2=\left[\frac{1}{x+1}\sqrt{x^2-1}\right]^2=\frac{x-1}{x+1}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
g		$\nearrow$		//////////////	0	$\nearrow$	

ب- نستنتج تغيرات f على كل من $]1;+\infty[$ و $]-\infty;-1[$

$\forall x\in]-\infty;-1[\cup[1;+\infty[\qquad g(x)=[f(x)]^2 \qquad f(x)=\frac{1}{x+1}\sqrt{x^2-1}$

$\forall x\in]-\infty;-1[\qquad f(x)=-\sqrt{g(x)} \qquad \forall x\in[1;+\infty[\quad f(x)=\sqrt{g(x)}$

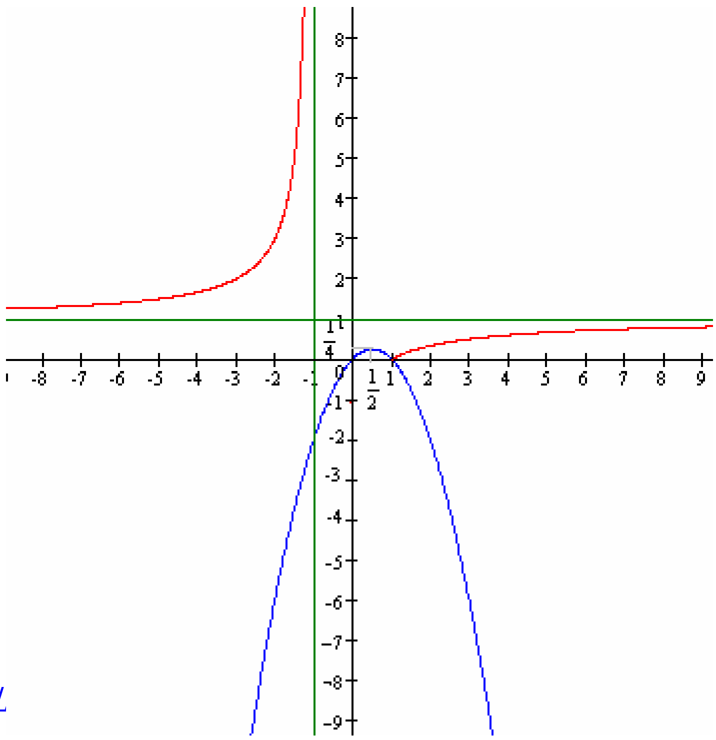
نعتبر $l:x\to\sqrt{x}$ ومنه $\forall x\in[1;+\infty[\quad f(x)=t\circ g(x) \qquad g([1;+\infty[)=[0;+\infty[$

و حيث g تزايدية قطعاعلى $]1;+\infty[$ و l تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$ فان f تزايدية قطعا على $]1;+\infty[$

و بما أن $f(x)=-\sqrt{g(x)}$ $\forall x\in]-\infty;-1[$ و g تزايدية على $]-\infty;-1[$ و $g(]-\infty;-1[)\subset[0;+\infty[$

فان f تناقصية على $]-\infty;-1[$

4- أ - ننشئ C_h و C_g



ب- نحدد جبريا تقاطع C_h و C_g

$$\left(\forall x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left[1;+\infty\right[\right)\qquad h(x)=g(x)\Leftrightarrow -x^2+x=\frac{x-1}{x+1}$$

$$\left(\forall x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left[1;+\infty\right[\right)\qquad h(x)=g(x)\Leftrightarrow (x-1)\left(-x-\frac{1}{x+1}\right)=0$$

$$\left(\forall x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left[1;+\infty\right[\right)\qquad h(x)=g(x)\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{-x^2-x-1}{x+1}\right)=0$$

$$\left(\forall x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left[1;+\infty\right[\right)\qquad h(x)=g(x)\Leftrightarrow x-1=0\quad\vee\quad -x^2-x-1=0$$

$$\left(\forall x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left[1;+\infty\right[\right)\qquad h(x)=g(x)\Leftrightarrow x=1$$

C_h و C_g يتقاطعان في النقطة ذات الأفصول 1

نحل مبيانيا $h(x)\geq g(x)$

من خلال التمثيل المبياني

$$h(x)\geq g(x)\Leftrightarrow x=1$$

-5 نبين جبريا أن $f\left(\left]1;+\infty\right[\right)=\left]0;1\right[$

* ليكن $x\succ 1$ وبما أن f تزايدية قطعا على $\left]1;+\infty\right[$ فان $f(x)\succ f(1)$ أي $f(x)\succ 0$

و منه $f\left(\left]1;+\infty\right[\right)\subset\left]0;1\right[$

* ليكن $y\in\left]0;1\right[$

$f(x)=y$ ومنه $\left[f(x)\right]=y^2$ أي $\dfrac{x-1}{x+1}=y^2$ و بالتالي $\dfrac{-2}{x+1}=y^2-1$

و منه $\dfrac{2}{-y^2+1}-1=x$ وحيث أن $y\in\left]0;1\right[$ فان $0\prec 1-y^2\prec 1$

و بالتالي $\dfrac{2}{1-y^2}\succ 2$ أي $\dfrac{2}{1-y^2}-1\succ 1$

$\forall y\in\left]0;1\right[\quad \exists x\in\left]1;+\infty\right[\quad / f(x)=y$ ومنه $f\left(\left]1;+\infty\right[\right)\supset\left]0;1\right[$

إذن $f\left(\left]1;+\infty\right[\right)=\left]0;1\right[$

-6 t قصور الدالة f على $\left]1;+\infty\right[$.

نبين أن t تقابل من $\left]1;+\infty\right[$ نحو $\left]0;1\right[$ و حدد $t^{-1}(x)$ لكل x من $\left]0;1\right[$

وجدنا $\forall y\in\left]0;1\right[\quad \exists x\in\left]1;+\infty\right[\quad \left(x=\dfrac{2}{1-y^2}-1\right)\quad / f(x)=y$

أي $\forall y\in\left]0;1\right[\quad \exists x\in\left]1;+\infty\right[\quad \left(x=\dfrac{2}{1-y^2}-1\right)\quad / t(x)=y$

إذن t شمولي

ليكن $(x;y)\in\left]1;+\infty\right[^2$

$$t(x)=t(y)\Rightarrow g(x)=g(y)\Rightarrow\frac{x-1}{x+1}=\frac{y-1}{y+1}\Rightarrow x=y$$

ومنه t تبايني اذن t تقابل من $]1;+\infty[$ نحو $]0;1[$ و $t^{-1}(x)=\dfrac{2}{1-x^2}-1 \quad \forall x\in]0;1[$

تمرين2

ABC مثلث $AB=AC=2BC$ و G مرجح $(A;-1)$ و $(B;1)$ و $(C;1)$

-1 نحدد مجموعة النقط M حيث $MB^2+MC^2=MA^2$

G مرجح $(A;-1)$ و $(B;1)$ و $(C;1)$ و منه $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GA}=0$ و بالتالي $\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{BA}$

و $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AG}$

$$MB^2+MC^2=MA^2 \Leftrightarrow MG^2-GA^2+GB^2+GC^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\left(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GA}\right)=0$$

$$MB^2+MC^2=MA^2 \Leftrightarrow MG^2-\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)^2+CA^2+BA^2=0$$

$$MB^2+MC^2=MA^2 \Leftrightarrow MG^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$$

$$MB^2+MC^2=MA^2 \Leftrightarrow MG^2-\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)=0$$

$$MB^2+MC^2=MA^2 \Leftrightarrow MG^2-7BC^2=0$$

$$MB^2+MC^2=MA^2 \Leftrightarrow MG=BC\sqrt{7}$$

$$MB^2+MC^2=MA^2 \Leftrightarrow M\in C\left(G;BC\sqrt{7}\right)$$

مجموعة النقط M حيث $MB^2+MC^2=MA^2$ هي الدائرة $C\left(G;BC\sqrt{7}\right)$

-2 أ- نبين أن $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AG} \quad \forall M\in(P)$

لدينا $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GA}=0$

$$\forall M\in(P) \quad \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}-2\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}-2\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{AG}$$

ب نستنتج مجموعة النقط M التي تحقق $MB^2+MC^2-2MA^2=8BC^2$

$$MB^2+MC^2-2MA^2=8BC^2 \Leftrightarrow AB^2+AC^2+2\overrightarrow{MA}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=8BC^2$$

$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AG} \quad \forall M\in(P)$ ومنه $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AG}$

و بالتالي $MB^2+MC^2-2MA^2=8BC^2 \Leftrightarrow 8BC^2+2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AG}=8BC^2$

$$MB^2+MC^2-2MA^2=8BC^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AG}=0$$

إذن مجموعة النقط M التي تحقق $MB^2+MC^2-2MA^2=8BC^2$ هي المستقيم العمودي على (AG) في A

تمرين3

(C_m) مجموعة النقط $M(x;y)$ حيث $x^2+y^2-(m-4)x+(m+4)y+6=0$ و $m\in\mathbb{R}$

-1 نبين أن (C_m) دائرة محددا مركزها Ω_m و شعاعها

$$x^2+y^2-(m-4)x+(m+4)y+6=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{m-4}{2}\right)^2+\left(y+\frac{m+4}{2}\right)^2-\left(\frac{m-4}{2}\right)^2-\left(\frac{m+4}{2}\right)^2+6=0$$

$$x^2+y^2-(m-4)x+(m+4)y+6=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{m-4}{2}\right)^2+\left(y+\frac{m+4}{2}\right)^2=\frac{m^2}{2}+2$$

إذن (C_m) مركزها $\Omega_m\left(\dfrac{m-4}{2};-\dfrac{m+4}{2}\right)$ و شعاعها $\sqrt{\dfrac{m^2+4}{2}}$

2- نحدد (D) مجموعة مراكز (C_m) عندما يتغير m في $\mathbb{R}$

ليكن m من $\mathbb{R}$

$$\Omega_m\left(\frac{m-4}{2};-\frac{m+4}{2}\right)\in(D)\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{m-4}{2}\\ y=-\dfrac{m+4}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{m-4}{2}\\ x+y+4=0\end{cases}$$

(D) هو المستقيم ذا المعادلة $x+y+4=0$

3- نبين أن جميع الدوائر (C_m) تمر من نقطتين ثابتتين A و B

$$(\forall m\in\mathbb{R})\quad x^2+y^2-(m-4)x+(m+4)y+6=0\Leftrightarrow m(-x+y)+x^2+y^2+4x+4y+6=0$$

$$(\forall m\in\mathbb{R})\quad x^2+y^2-(m-4)x+(m+4)y+6=0\Leftrightarrow(-x+y)=0\quad et\quad x^2+y^2+4x+4y+6=0$$

$$(\forall m\in\mathbb{R})\quad x^2+y^2-(m-4)x+(m+4)y+6=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\ x^2+4x+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=-1\end{cases}ou\begin{cases}x=-3\\ y=-3\end{cases}$$

الدوائر (C_m) تمر من نقطتين ثابتتين $A(-1;-1)$ و $B(-3;-3)$

4- تحقق أن $(D)\perp(AB)$

لدينا $A(-1;-1)$ و $B(-3;-3)$ ومنه $\overrightarrow{AB}(-2;-2)$

و $(D):x+y+4=0$ و $\vec{u}(1;1)$ منظمية على (D) و $\overrightarrow{AB}=-2\vec{u}$ إذن $(D)\perp(AB)$

5- أ – نناقش حسب قيم m تقاطع C_{-2} و (Δ_m)

$(C_{-2}):x^2+y^2+6x+2y+6=0$ و $(\Delta_m):y=-2x+m$

C_{-2} دائرة مركزه $\Omega(-3;-1)$ وشعاعها $r=2$

$$d[\Omega;\Delta_m]=\frac{|6+1+m|}{\sqrt{5}}=\frac{|7+m|}{\sqrt{5}}$$

$$d[\Omega;\Delta_m]=2\Leftrightarrow\frac{|7+m|}{\sqrt{5}}=2\Leftrightarrow|7+m|=2\sqrt{5}\Leftrightarrow m=2\sqrt{5}-7\quad ou\quad m=-2\sqrt{5}-7$$

إذا كان $m=2\sqrt{5}-7$ أو $m=-2\sqrt{5}-7$ فان C_{-2} و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة وحيدة

إذا كان $m\in\left]-2\sqrt{5}-7;2\sqrt{5}-7\right[$ فان C_{-2} و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتين مختلفتين M_1 و M_2

إذا كان $m\in\left]-\infty;-2\sqrt{5}-7\right[\cup\left]2\sqrt{5}-7;+\infty\right[$ فان $(C_{-2})\cap\Delta_m=\varnothing$

ب- نحدد مجموعة النقط I_m عندما يتغير m في $\mathbb{R}$

$(\Delta_m)\cap C_{-2}=\{M_1;M_2\}$ و I_m منتصف $[M_1;M_2]$.

$$\begin{cases}x^2+y^2+6x+2y+6=0\\ y=-2x+m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x^2+2(-2m+1)x+m^2+2m+6=0\\ y=-2x+m\end{cases}$$

لتكن $M_1(x_1;y_1)$ و $M_2(x_2;y_2)$

لدينا x_1 و x_2 حلي المعادلة $5x^2+2(-2m+1)x+m^2+2m+6=0$

$x_1+x_2=\dfrac{-2(-2m+1)}{5}$ و $y_1+y_2=-2(x_1+x_2)+2m=\dfrac{4(-2m+1)}{5}+2m=\dfrac{2(m+2)}{5}$

ومنه $I_m\left(\dfrac{2m-1}{5};\dfrac{m+2}{5}\right)$ حيث $m\in\left]-2\sqrt{5}-7;2\sqrt{5}-7\right[$

$$\begin{cases} x = \dfrac{2m-1}{5} \\ y = \dfrac{m+2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2m-1}{5} \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

إذن مجموعة النقط I_m هي القطعة المفتوحة التي طرفيها $E\left(\dfrac{-4\sqrt{5}-15}{5};\dfrac{-2\sqrt{5}-5}{5}\right)$ و

$F\left(\dfrac{4\sqrt{5}-15}{5};\dfrac{2\sqrt{5}-5}{5}\right)$