تصحيح فرض شهر مارس	الأولى سلك بكالوريا علوم رياضية

التمرين 1

1- نحدد النهايات

*- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-\sqrt{x}+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{3}{x}}=1$$

*- $$\lim_{x\to1}\frac{x\sqrt{x}-1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^3-1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^3-1}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}+1\right)(x+1)}=\frac{3}{4}$$

*- بما أن $\lim_{x\to-2^-}x^2+3x=-2$ و $\lim_{x\to-2^-}x^2-x-6=o$ و $x^2-x-6\succ0 \quad \forall x\in]-\infty;-2[$

فان $$\lim_{x\to-2^-}\frac{x^2+3x}{x^2-x-6}=-\infty$$

*- نحد $\lim_{x\to0}x^2E(\frac{1}{x})$

$\frac{1}{x}-1\prec E\left(\frac{1}{x}\right)\le\frac{1}{x} \quad \forall x\in\mathbb{R}$ ومنه $x-x^2\prec x^2E\left(\frac{1}{x}\right)\le x \quad \forall x\in\mathbb{R}$

و حيث أن $\lim_{x\to0}x=0=\lim_{x\to0}x-x^2$ فان $\lim_{x\to0}x^2E(\frac{1}{x})=0$

*- نحدد $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}$

نعلم $|\sin x|\le1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$ ومنه $0\le\left|\frac{\sin x}{x}\right|\le\left|\frac{1}{x}\right| \quad \forall x\in\mathbb{R}$

و حيث أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ فان $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$

*- نحدد $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x+2}{\tan x-2}$

لدينا $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=\pm\infty$ ومنه $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x+2}{\tan x-2}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\frac{2}{\tan x}}{1-\frac{2}{\tan x}}=1$$

2- نحدد حسب قيم البارامتر الحقيقي m $\quad \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x-1}+mx)$

* إذا كان $m\ge0$ فان $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x-1}+mx)=+\infty$

* إذا كان $m\prec0$

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x-1}+mx)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x-1-m^2x^2}{\sqrt{x^2+3x-1}-mx}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-m^2\right)x^2+3x-1}{\sqrt{x^2+3x-1}-mx}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-m^2\right)x+3-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}-m}$$

- إذا كان $1-\prec m\prec 0$ فان $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x-1}+mx)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-m^2\right)x+3-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}-m}=+\infty$

- إذا كان $m\prec -1$ فان $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x-1}+mx)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-m^2\right)x+3-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}-m}=-\infty$

- إذا كان $m=-1$ فان $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x-1}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{3}{2}$

التمرين2

نعتبر f دالة المعرفة بـ

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sin^2 \pi x}{x^2+x-2} & x\neq 1 \\ f(1)=0 \end{cases}$$

1- نحدد D_f

$x^2+x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$ و $x\neq -2$

f **معرفة في 1** إذن $D_f=\mathbb{R}-\{-2\}$

2- ندرس اتصال f **على** D_f

* الدالتان $x\to \sin^2 \pi x$ و $x\to x^2+x-2$ متصلتان في $\mathbb{R}$ و $x^2+x-2\neq 0$ $\quad \forall x\in\mathbb{R}-\{-2;1\}$

ومنه f متصلة في كل نقطة من $\mathbb{R}-\{-2;1\}$

* نضع $X=x-1$ ومنه

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2 \pi x}{x^2+x-2}=\lim_{X\to 0}\frac{\sin^2(\pi X+\pi)}{(X+1)^2+X-1}=\lim_{X\to 0}\frac{\sin^2(\pi X)}{X^2+3X}=\lim_{X\to 0}\left(\frac{\sin(\pi X)}{X}\right)^2.\frac{X}{X+3}=0=f(1)$$

و بالتالي f متصلة في **0**

إذن f متصلة في كل نقطة من $\mathbb{R}-\{-2\}$

التمرين3

1- عدد الإمكانيات الممكنة هو $A_{15}^3=15\times 14\times 13=.....$

2- عدد الإمكانيات التي يكون فيها الكاتب العام و الأمين من الإناث هو $A_9^4+A_9^2\times A_6^2$

التمرين4

لتكن E و F مجموعتين غير فارغتين و منفصلتين بحيث $cardE=cardF=n$

1- نبين أن عدد الأزواج $(X;Y)$ **من** $\left[P(E)\right]^2$ **بحيث** $X\cup Y=E$ **و** $n\geq 2$ **هو** 3^n

نضع $cardX=p$ بما أن $X\cup Y=E$ فان $Y=\bar{X}\cup A$ حيث $A\in P(X)$

ومنه عدد المجموعات الجزئية Y حيث $X \cup Y = E$ هو عدد عناصر $P(X)$ أي 2^p

و بما أن عدد أجزاء E التي رئيسها p هو C_n^p فان عدد الأزواج $(X;Y)$ حيث $cardX = p$

هو $C_n^p 2^P$

و حيث أن $p \in \{0;1;2......;n\}$ فان عدد الأزواج $(X;Y)$ حيث $X \cup Y = E$ هو

$$\sum_{p=0}^{n} C_n^p 2^p = (1+2)^n = 3^n$$

2- نحسب بطريقتين مختلفتين عدد أجزاء $E \cup F$ المكونة من n عنصر. و استنتج أن $C_{2n}^n = \sum_{k=0}^{k=n} \left(C_n^k\right)^2$

*- بما أن $card(E \cup F) = 2n$ فان عدد أجزاء $E \cup F$ المكونة من n عنصر هو C_{2n}^n

*- كل جزء من $E \cup F$ يكون مكون من k عنصر من E و $n-k$ عنصر من F حيث $k \in \{0;1;2;....;n\}$

عدد الحالات الممكنة لاختيار جزء مكون من k عنصر من E هو C_n^k

عدد الحالات الممكنة لاختيار جزء مكون من $n-k$ عنصر من F هو $C_n^{n-k} = C_n^k$

عدد أجزاء $E \cup F$ المكونة من n عنصر يحتوي على k عنصر من E و $n-k$ عنصر من F

هو $C_n^k \times C_n^k = \left(C_n^k\right)^2$ حيث $k \in \{0;1;2;....;n\}$

إذن عدد أجزاء $E \cup F$ المكونة من n هو $\sum_{k=0}^{k=n} \left(C_n^k\right)^2$

ومنه نستنتج أن $C_{2n}^n = \sum_{k=0}^{k=n} \left(C_n^k\right)^2$

* نستنتج أن $\frac{n}{2} C_{2n}^n = \sum_{k=0}^{k=n} k\left(C_n^k\right)^2$

نضع $S = \sum_{k=0}^{k=n} k\left(C_n^k\right)^2$

$$S = 0.\left(C_n^0\right)^2 + 1.\left(C_n^1\right)^2 + ... + (n-1)\left(C_n^{n-1}\right)^2 + n\left(C_n^n\right)^2$$

$$S = n.\left(C_n^n\right)^2 + (n-1).\left(C_n^{n-1}\right)^2 + ... + 1.\left(C_n^1\right)^2 + 0.\left(C_n^0\right)^2$$

$S = n.\left(C_n^0\right)^2 + (n-1).\left(C_n^1\right)^2 + ... + 1.\left(C_n^{n-1}\right)^2 + 0.\left(C_n^n\right)^2$ لأن $C_n^{n-k} = C_n^k$

$$2S = n.\left(C_n^0\right)^2 + n.\left(C_n^1\right)^2 + ... + n.\left(C_n^{n-1}\right)^2 + n.\left(C_n^n\right)^2$$

$$2S = n\left(\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + ... + \left(C_n^{n-1}\right)^2 + \left(C_n^n\right)^2\right) = nC_{2n}^n$$

إذن $\frac{n}{2} C_{2n}^n = \sum_{k=0}^{k=n} k\left(C_n^k\right)^2$