

تمرين رقم 1 :

نعتبر التطبيق f المعرفة بما يلي :

$$f : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{2x+5}{x-1}$$

- 1- بين أن التطبيق f تبايني.
- 2- بين أن التطبيق f ليس شموليا .
- 3- حدد المجموعة F لكي يكون التطبيق g التالي شموليا .
 $g : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow F \quad x \mapsto \frac{2x+5}{x-1}$
- أذاً بين أن g تقابل ثم حدد تقابله العكسي g^{-1} .

تمرين رقم 6 :

نعتبر التطبيق f المعرفة بما يلي :

$$f : \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow B \quad x \mapsto \frac{2x-1}{x+3}$$

- 1- حدد المجموعة B لكي يكون التطبيق f تقابلا.
- 2- حدد التقابل العكسي f^{-1} للتقابل f .
- 3- حدد $f^{-1}\left(\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right]\right)$ و $f([0; 1])$
- 4- أحسب $f^{-1} \circ f(x)$ لكل $x \in \mathbb{R} - \{3\}$

تمرين رقم 2 :

نعتبر التطبيق f المعرفة بما يلي :

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x+1}$$

- 1- بين أن :
 $\forall x, x' \in \mathbb{R}^+ : f(x) = f(x') \Rightarrow (x = x' \text{ أو } xx' = 1)$
- 2- هل التطبيق f تبايني؟

تمرين رقم 7 :

نعتبر التطبيق f المعرفة بما يلي :

$$f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{|x|+2}{x}$$

- 1) بين أن f تطبيق تبايني .
- 2) أ- حل في \mathbb{R}^* المعادلة $f(x) = 1$.
 ب- هل f تطبيق شمولي ؟

تمرين رقم 3 :

نعتبر التطبيق f المعرفة بما يلي :

$$f : \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$

- 1) أ- بين أن : $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\} \quad f(x) < 1$
 ب- هل التطبيق f شمولي؟
- 2) أ- بين أن : $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\} \quad f(-x-2) = f(x)$
 ب- هل التطبيق f تبايني؟

تمرين رقم 8 :

لتكن E و F و G ثلاث مجموعات .

نعتبر $f : E \rightarrow F$ و $g : F \rightarrow G$ تطبيقين .

- 1) أ- بين أنه إذا كان f و g تباينين فإن $g \circ f$ تباين .
 ب- بين أنه إذا كان f و g شموليين فإن $g \circ f$ شمول .
- 2) أ- بين أنه إذا كان $g \circ f$ تباين فإن f تباين .
 ب- بين أنه إذا كان $g \circ f$ شمول فإن g شمول .

تمرين رقم 4 :

نعتبر التطبيق f المعرفة بما يلي :

$$f : [1; +\infty[\rightarrow [2; +\infty[\quad x \mapsto x + \frac{1}{x}$$

- 1- بين أن f تطبيق تبايني .
- 2- بين أن f تطبيق شمولي .
- 3- استنتج أن f تقابل و حدد تقابله العكسي f^{-1} .
- 4- حل في المجال $[2; +\infty[$ المعادلة $f^{-1}(x) = 3$

تمرين رقم 9 :

نعتبر التطبيق f المعرفة بما يلي :

$$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q} \quad (p, q) \mapsto p + \frac{1}{q}$$

- 1) نفترض أن $\exists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \quad f(p, q) = \frac{2}{3}$
 أ- بين أن : $-\frac{1}{3} \leq p < \frac{2}{3}$
 ب- استنتج أن : $\frac{1}{q} = \frac{2}{3}$
 ج- هل التطبيق f شمولي؟
- 2) ليكن (p, q) و (p', q') زوجين من $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$
 نفترض أن $f(p, q) = f(p', q')$
 أ- بين أن : $-1 < p - p' < 1$ واستنتج أن $p = p'$
 ب- هل التطبيق f تبايني؟

تمرين رقم 5 :

نضع $I =]0; +\infty[$ و نعتبر التطبيق f المعرفة من $I \times I$

$$\forall (x; y) \in I \times I \quad f(x; y) = \left(xy; \frac{x}{y} \right)$$

- 1- بين أن f تطبيق تبايني و شمولي .
- 2- حدد التقابل العكسي للتقابل f .

تمرين رقم 1:

لتكن E و F مجموعتين غير فارغتين و f تطبيق من E نحو F . ليكن A و B جزأين من E . بين أن :

$$A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$$

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

$$A \subset f^{-1}(f(A))$$

تمرين رقم 2:

ليكن $f : E \rightarrow F$ تطبيق . بين أن :

$$(1) \quad f \text{ تبايني (f تبائي)}$$

$$\Leftrightarrow [\forall X, Y \in \mathfrak{S}(E) \quad f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)]$$

$$(2) \quad f \text{ تبايني (f تبائي)} \Leftrightarrow [\forall X \in \mathfrak{S}(E) \quad f^{-1}(f(X)) = X]$$

تمرين رقم 3:

ليكن $f : E \rightarrow F$ تطبيق و A جزءا من E بين أن :

$$(1) \quad f(E) - f(A) \subset f(E - A)$$

(2) استنتج أنه إذا كان f شموليا فإن :

$$F - f(A) \subset f(E - A)$$

(3) نفترض أن f تبايني . أثبت أن :

$$f(E - A) \subset F - f(A)$$

(4) استنتج مما سبق أن : (f تقابلي)

$$\Leftrightarrow [\forall X \in \mathfrak{S}(E) \quad F - f(X) = f(E - X)]$$

تمرين رقم 4:

لتكن E و F مجموعتين غير فارغتين و f تطبيق من E نحو F . ليكن A و B جزأين من F . بين أن :

$$A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$$

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

$$f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$$

$$[\forall X \in \mathfrak{S}(F) \quad f\left(f^{-1}(X)\right) = X] \Leftrightarrow (f \text{ شمولي})$$

تمرين رقم 5:

تعريف: ليكن $f : E \rightarrow F$ تطبيقا و A جزءا من E . التطبيق الذي نرمز إليه ب f_A والمعرف من E نحو الثنائية $\{0;1\}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f_A(x) = 1 & ; x \in A \\ f_A(x) = 0 & ; x \notin A \end{cases}$$

التطبيق المميز للمجموعة A (في المجموعة E)

$$(1) \quad \text{بين أن : } f_A \leq f_B \Leftrightarrow A \subset B \quad \forall A, B \in \mathfrak{S}(E)$$

$$\forall A, B \in \mathfrak{S}(E)$$

$$(2) \quad \text{بين أن : } f_{A-B} = f_A(1 - f_B) \quad f_{A \cap B} = f_A \cdot f_B$$

$$f_{A \cup B} = f_A + f_B - f_A f_B$$

تمرين رقم 6:

ليكن $f : E \rightarrow F$ تطبيقا .

(1) نفترض أنه يوجد تطبيق $g : F \rightarrow E$ بحيث

$$g \circ f = 1_E \quad . \text{ بين أن } f \text{ تبايني}$$

(2) نفترض أنه يوجد تطبيق $h : F \rightarrow E$

بحيث $h \circ f = 1_F$. بين أن f تطبيق شمولي .

(3) بين أنه لكل تطبيق f من E نحو F يوجد تطبيقان g

و h بحيث $g \circ f = 1_E$ و $h \circ f = 1_F$ إذا فقط إذا كان

التطبيق f تقابلي و $g = h$.

(4) نعتبر التطبيق f من E نحو F . بين أن :

$$(f \text{ تقابلي و } f = f^{-1}) \Leftrightarrow (f \circ f = 1_E)$$

تمرين رقم 7:

لتكن E مجموعة غير فارغة .

نعتبر التطبيق f المعرف بما يلي :

$$f : \mathfrak{S}(E) \rightarrow \mathfrak{S}(E) \quad X \mapsto \bar{X}$$

(1) بين أن f تطبيق تبايني .

(2) بين أن f تطبيق شمولي .

(3) استنتج أن f تطبيق تقابلي وحدد تقابله العكسي .

تمرين رقم 8:

حدد جميع التطبيقات f من \mathbb{R} نحو \mathbb{R} التي تحقق العلاقة

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

تمرين رقم 1 :

نعتبر التطبيق f المعرفة بما يلي :

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto (xy, x + y)$$

(1) هل التطبيق f تبايني؟

(2) هل التطبيق f شمولي؟

(3) ليكن D الجزء من $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ المعرفة بما يلي :

$$D = \{(x, x) / x \in \mathbb{R}\} \text{ حدد } f^{-1}(D)$$

تمرين رقم 2 :

نعتبر التطبيق f المعرفة بما يلي :

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto x + y$$

(1) هل التطبيق f تبايني؟

(2) هل التطبيق f شمولي؟

تمرين رقم 3 :

نعتبر التطبيق f المعرفة بما يلي :

$$f : \mathbb{Z} \times [0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$(n, x) \mapsto n + x$$

(1) بين أن التطبيق f تبايني؟

(2) بين أن التطبيق f شمولي؟

(3) حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من \mathbb{R}